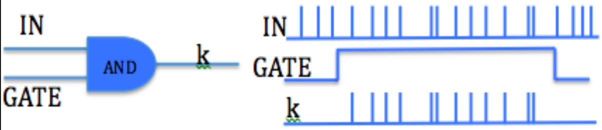
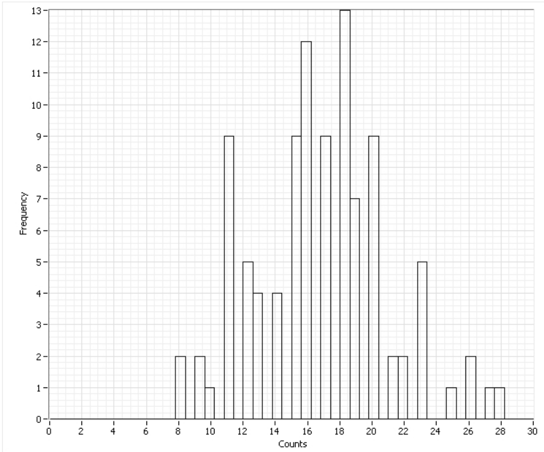


ACQUISIZIONE DI 100 GATEs da 1 s → 1671 eventi



Gates: 100
Counts mean: 16,71
Counts std: 4,21

r = (16,71 +/- 0,42) Hz

101° GATE → fra 12 e 21 conteggi

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE (tempi di arrivo)

un fenomeno si presenta con <u>frequenza r</u> (eventi/unità di tempo). Quando si verifica l'evento? Cioè: quanto tempo intercorre fra un evento e il successivo (distribuzione dei tempi di arrivo)?
Il tempo t che intercorre fra un evento e il successivo è legato alla <u>probabilità di non avere eventi fino a t e almeno un evento fra t e t+dt:</u>

- la probabilità che non si verifichi nessun evento nell'intervallo temporale 0÷t, avendo in media m = r t eventi (Poisson), è:

  P(0 eventi nell'intervallo t) = e^{-rt} $\qquad$ $P_{rt}(0) = \frac{e^{-rt}(rt)^0}{0!}$

- la probabilità di avere almeno un evento fra t e t+dt è complementare alla probabilità di non averne nessuno

  dP(≥ 1 eventi in dt) = 1- $e^{-r\,dt}$ = r dt $\qquad$ $P_{rdt}(0) = \frac{e^{-rdt}(rdt)^0}{0!}$

- i due casi precedenti sono indipendenti → la probabilità che si verifichino contemporaneamente è:

dP(t) = f(t) dt = P(0 eventi fino a t) x dP(≥ 1 eventi in dt) =
= e^{-rt} x 1- $e^{-r\,dt}$ = e^{-rt} r dt

$$f(t) = dP(t)/dt = r\,e^{-rt}$$

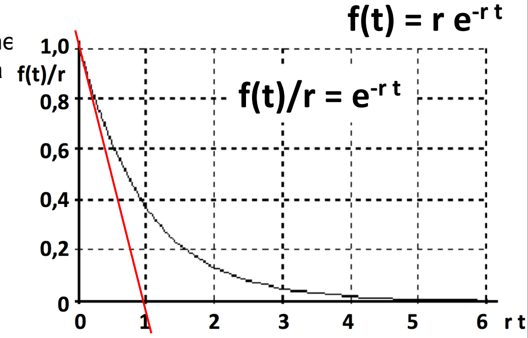
DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$f(t) = r\,e^{-r\,t}$

Con qualche calcolo si può verificare che

- è soddisfatta la proprietà di chiusura
- **Valore medio**: $E(t) = m = \mathbf{1/r}$
- **Varianza** : $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \mathbf{1/r^2}$

r t	**f(t)/r**	**P(≥1 fra 0 e t)**
0,0	1,000	0,0 %
0,5	0,607	39,3 %
1,0	0,368	63,2 %
2,0	0,135	86,5 %
3,0	0,0498	95,0 %
4,0	0,0183	98,2 %
5,0	0,0067	99,3 %



tangente alla curva in (0,1)

P_{rt} (≥1 fra 0 e t) = $\int_0^t r e^{-rt} dt = 1 - e^{-rt}$

Se un dispositivo si guasta 1 volta l'anno (r = 1/anno), la probabilità di non avere guasti (probabilità di sopravvivenza) si riduce esponenzialmente e dopo 5 anni (r t = 5) diventa praticamente nulla: 1- 99,3% = 0,67%.

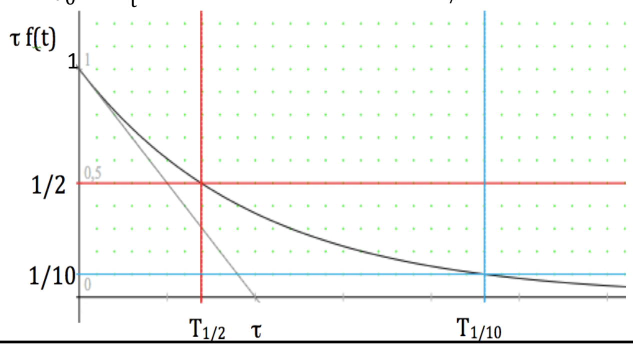
La probabilità di avere almeno un guasto entro i primi 2 anni è pari a 86,5%; quella di averlo durante il secondo anno è: P(entro il 2°) – P(entro il 1°) = 86,5% - 63,2% = 23,3%.

L'inverso di r è il tempo $\tau = 1/r$ caratteristico dell'andamento esponenziale:
$E(t) = 1/r = \tau$ è il tempo che in media trascorre fra il verificarsi di un evento e il successivo
(nel caso del decadimento di nuclei radioattivi r è la costante di decadimento λ e τ è la vita media)
La distribuzione $f(t) = r\,e^{-rt}$ può quindi essere riscritta come $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

ESEMPIO: determinare il tempo $T_{1/2}$ entro il quale l'evento si verifica con una probabilità del 50%

Si tratta di integrare $f(t) = 1/\tau\ e^{-t/\tau}$ fra 0 e $T_{1/2}$ e porre il risultato pari a 0,5 :

$$\int_0^{T_{1/2}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = e^{-T_{1/2}/\tau} = 0{,}5 \rightarrow T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0{,}69\ \tau$$



ESERCIZIO: analogamente al tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ si può determinare l'istante $T_{1/10}$ prima del quale c'è una probabilità del 90% del verificarsi dell'evento (e quindi una probabilità 1/10 che ancora non si sia verificato).

$0{,}1 = e^{-\frac{T_{1/10}}{\tau}} \rightarrow T_{1/10} = -\tau \ln 0{,}1 = 2{,}30\ \tau$

ESERCIZIO: dopo quanto tempo l'attività di una sorgente di ^{60}Co si riduce a 10 MBq se inizialmente A = 1 GBq? $T_{1/2}$ = 5,3 y.
Quanti decadimenti avvengono nel primo anno?

$T_{1/2} = 0{,}69\ \tau = 5{,}3\ y \rightarrow \tau = 7{,}6\ y = 2{,}4\ 10^8\ s$

$dN = -N\ dP(t) = -N\ (\lambda\ dt)$

$\rightarrow N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$

$\rightarrow A(t) = \lambda\ N(t) = N(t)/\tau = A_0\ e^{-t/\tau}$

$A(t^*) = A_0\ e^{-t^*/\tau} \rightarrow t^* = 35\ y$

$= 6{,}6\ T_{1/2}$ $\qquad 2^{6{,}6} = 100$

$N(1°\text{anno}) = \int_0^{1y} dN(t) = \int_0^{1y} -N_0\, e^{-\lambda t} dt = A_0\, \tau\, (1 - e^{-\frac{1y}{\tau}}) =$

$= 10^9\ 2{,}4\ 10^8\ 0{,}12 = 3\ 10^{16}$

$N_A = 6\ 10^{23} \rightarrow$ 50 nmol nel 1° anno

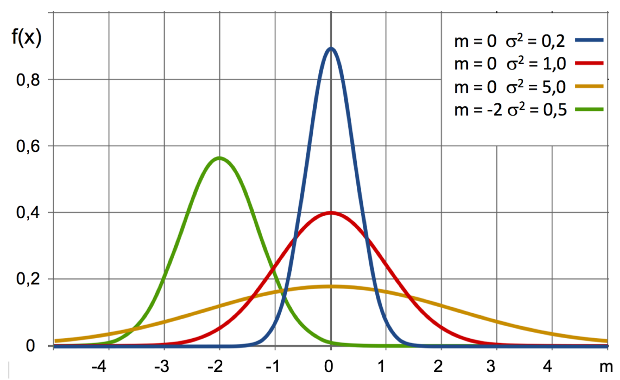
DISTRIBUZIONE DI GAUSS (o normale)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

v.a. continua $-\infty < x < +\infty$

La densità di probabilità gaussiana è derivabile ipotizzando che il risultato ideale **m** di una misura sia affetto da una infinità di piccoli effetti che ne variano il valore aumentandolo o diminuendolo casualmente della stessa quantità infinitesima

È quindi intuitivo che la distribuzione di Gauss sia simmetrica intorno a m (abbiamo supposto che quantità infinitesime si sommino e sottraggono con ugual probabilità al valore m) e che tenda a zero man mano che ci si discosti da m (è nulla la probabilità che un'infinità di valori sia sempre in eccesso/difetto)

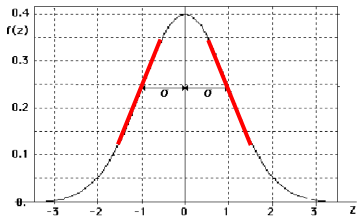


DISTRIBUZIONE DI GAUSS

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Applicando le definizioni si può verificare che:
- la funzione gode della proprietà di chiusura
- $E(X) = m$
- $Var(X) = \sigma^2$

I flessi della funzione sono per i valori di $x = m \pm \sigma$



INTERVALLI E LIVELLI DI CONFIDENZA NOTEVOLI DELLA GAUSSIANA

$P(m - \sigma < x < m + \sigma) =$ **68,3%**
$P(m - 2\sigma < x < m + 2\sigma) =$ **95,4%**
$P(m - 3\sigma < x < m + 3\sigma) =$ 99,7%

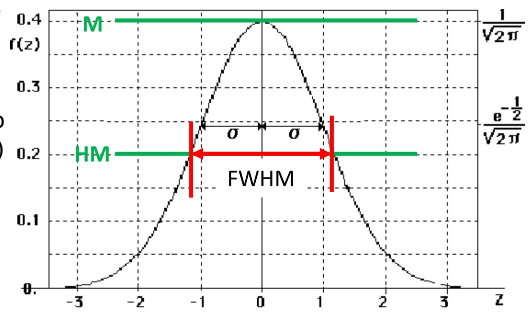
ESERCIZIO: Verificare che la probabilità che una misura distribuita gaussianamente sia più grande del valor medio di una quantità 2σ è pari al 2,3%

La **precisione** di un sistema di misura è la capacità di fornire la stessa risposta a parità di sollecitazione. Gli errori casuali alterano la risposta rendendo imprecisa la misura. La distribuzione degli errori segue la distribuzione di Gauss ed è quindi utilizzabile per stimare la risoluzione di uno strumento.

Al crescere di σ diminuisce il massimo della funzione (l'area sottesa è unitaria)

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ detto modulo di precisione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Anche la distribuzione delle **media aritmetica** (norma) di N misure tende, al crescere di N, a una gaussiana (teorema del limite centrale)

ESERCIZIO: verificare che la larghezza della funzione calcolata a mezza altezza (Full Width at Half Maximum) è pari a FWHM = $2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma = 2{,}35\,\sigma$

RIASSUMENDO: il risultato di una serie di N misure della stessa grandezza X è rappresentato dalla media **m** della distribuzione di probabilità di x: gli errori di misura alterano casualmente il valore x ora in eccesso, ora in difetto, all'incirca come avviene per la distribuzione di Gauss.
Dal punto di vista statistico quindi si stima:
- **m** con la media aritmetica
- $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ con $\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{N-1}}$.

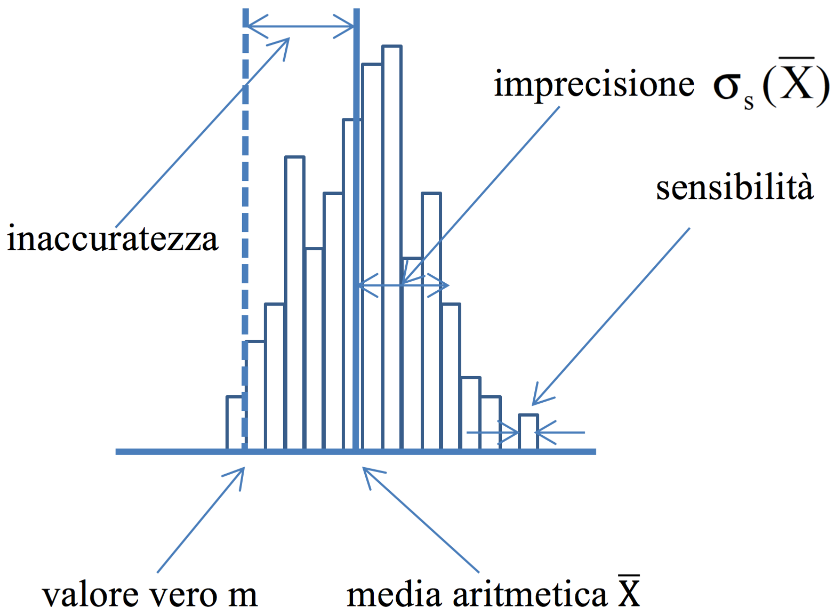
La media aritmetica compensa parzialmente le fluttuazioni in eccesso rispetto a **m** con quelle in difetto e quindi la sua precisione migliora. Si conviene quindi di riportare come risultato la media aritmetica con incertezza $\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_s(X)$

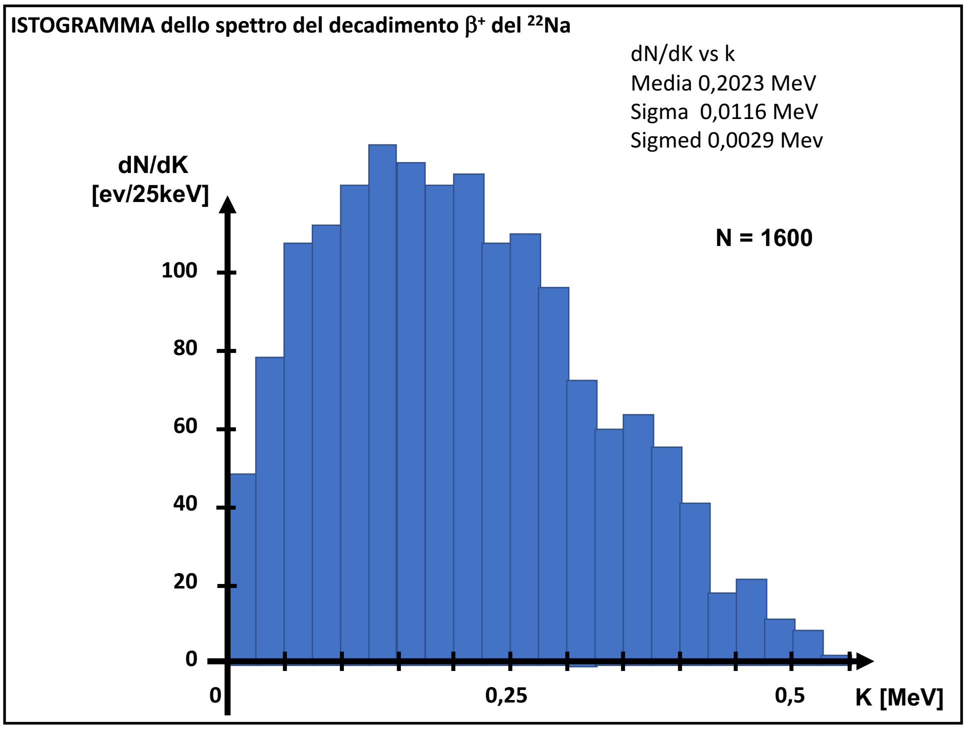
Il teorema del limite centrale, infine, per N sufficientemente grande garantisce che la distribuzione della media aritmetica sia gaussiana e che quindi con elevata probabilità (circa 68% di livello di confidenza)

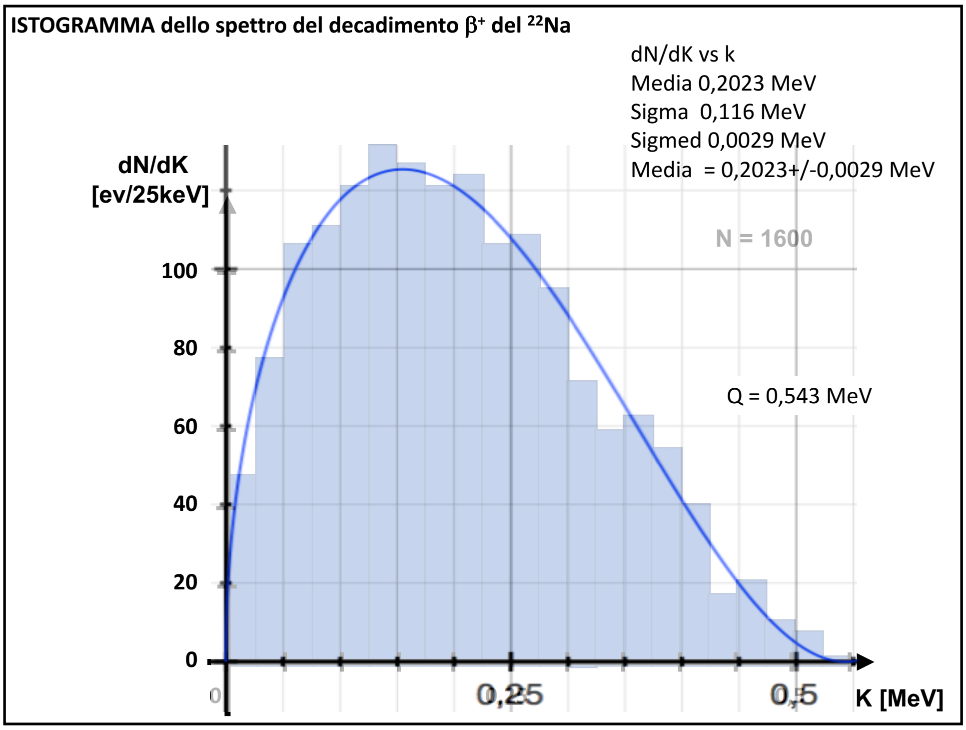
$$\bar{X} - \sigma_s(\bar{X}) < m < \bar{X} + \sigma_s(\bar{X}).$$

Al crescere di N si ha che $\sigma_s(\bar{X})$ diminuisce (N al denominatore), quindi l'intervallo si stringe e la media aritmetica diventa una stima sempre più buona di m:

$$\mathbf{m \approx \bar{X} \pm \sigma_s(\bar{X}) = \bar{X} \pm \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}} = \bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{N-1}}}$$

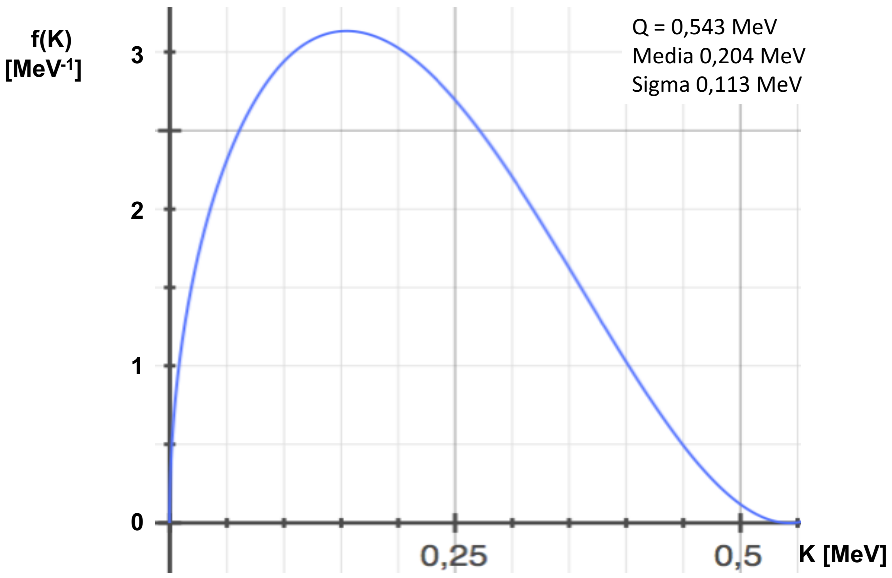



ISTOGRAMMA dello spettro del decadimento β^+ del ^{22}Na
dN/dK vs k
Media 0,2023 MeV
Sigma 0,0116 MeV
Sigmed 0,0029 Mev
dN/dK [ev/25keV]
N = 1600
100
80
60
40
20
0
0
0,25
0,5
K [MeV]


ISTOGRAMMA dello spettro del decadimento β^+ del ^{22}Na
dN/dK vs k
Media 0,2023 MeV
Sigma 0,116 MeV
Sigmed 0,0029 MeV
Media = 0,2023+/-0,0029 MeV
dN/dK [ev/25keV]
N = 1600
Q = 0,543 MeV
100
80
60
40
20
0
0
0,25
0,5
K [MeV]

DISTRIBUZIONE dello spettro del decadimento β^+ del ^{22}Na

$$N(KE_e) = C\sqrt{KE_e^2 + 2KE_e m_e c^2}(Q - KE_e)^2(KE_e + m_e c^2)F(Z', KE_e)$$



se la misura indiretta di Y è espressa da un monomio delle grandezze fisiche $X_1, X_2, \ldots, X_N$, cioè $Y = c\, X_1^{p1} X_2^{p2} \ldots X_N^{pN}$

$$\frac{\sigma(Y)}{|Y|} = \sqrt{\sum_{i=1,N} p_i^2 \left(\frac{\sigma(X_i)}{X_i}\right)^2}$$

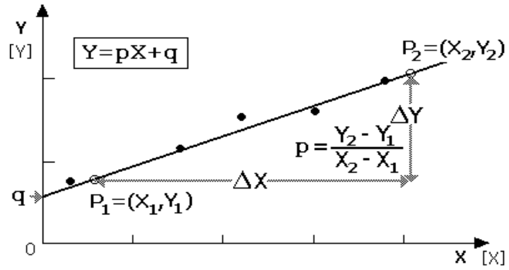
dove $\dfrac{\sigma(X)}{|X|}$ è detta incertezza relativa

$$\rho = \frac{M}{L^3} \rightarrow \frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(M)}{M}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma(L)}{L}\right)^2}$$

$$G = k\, V^n \rightarrow \frac{\sigma(G)}{G} = n\, \frac{\sigma(V)}{V}$$

Avremo spesso bisogno di studiare la dipendenza di una grandezza fisica Y da un'altra grandezza X a partire da una serie di N coppie di misure X_i, Y_i.
Se l'andamento è di tipo lineare è banale ricavare da un grafico Y vs X i valori dei parametri della retta Y = p X + q in cui
p è la pendenza (non adimensionale) della retta
q è l'intercetta con l'asse delle Y

$Y_1 = p X_1 + q$
$Y_2 = p X_2 + q$
$Y_2 - Y_1 = p (X_2 - X_1)$
$q = Y(X=0)$



In laboratorio l'elaborazione statistica delle N coppie di misure verrà effettuata tramite il **metodo dei minimi quadrati** che consiste nel determinare i parametri che minimizzano globalmente le distanze (al quadrato) dei punti sperimentali dalla retta