Università "La Sapienza" **INGEGNERIA BIOMEDICA**

FISICA DELLE RADIAZIONI APPLICATA ALLA MEDICINA

A.A. 2016-17

Organizzazione del corso:

- 60 ore di teoria (Prof. Patera) - Lun Mar Gio

- 20 ore di lezioni di laboratorio (Prof. Sciubba) - Ven
- 20 ore di esercitazioni in laboratorio (Prof. Sciubba) – 5 Mercoledì

- Esame: Proff. Patera & Sciubba, commissione unica

Contenuti del corso

La medicina nucleare e la radiologia sono le principali branche della medicina che utilizzano le radiazioni per scopi diagnostici e terapeutici. La ricerca in questi settori punta al miglioramento dell'efficacia delle tecniche esistenti e allo sviluppo di nuove con lo scopo di incrementare la qualità delle prestazioni erogate e la prevenzione dei rischi per i pazienti, gli operatori e la popolazione in generale.

Questo corso illustra cosa sono le radiazioni ionizzanti, come interagiscono con la materia, quali effetti biologici producono e indica come utilizzarne gli effetti benefici in campo sanitario e limitarne i danni potenziali accennando, infine, alla normativa radioprotezionistica più rilevante.

In particolare il <u>modulo di laboratorio</u> del <u>corso di Fisica delle radiazioni applicata alla medicina</u> mira a sviluppare alcuni concetti di fisica relativi alla misura di grandezze radiometriche e, soprattutto, a far considerare la radioattività come uno strumento da maneggiare sì con cura ma che è in grado di permettere diagnosi e terapie altrimenti impossibili.

Le <u>lezioni del modulo di laboratorio</u> inizieranno col considerare la natura aleatoria delle misure e accennare ad alcuni elementi di base di calcolo delle probabilità e di statistica sufficienti per poter dedurre dai risultati delle misure i valori di alcune grandezze di interesse. Appena possibile gli aspetti teorici illustrati verranno verificati in una esperienza di laboratorio dedicata al conteggio di eventi radioattivi.
Seguirà la descrizione particolareggiata di un tipo di rivelatore utilizzato in alcune apparecchiature medicali dato che è parte integrante dell'attrezzatura in dotazione al laboratorio. Le caratteristiche del rivelatore verranno dettagliate ad un livello sufficiente per essere verificate sperimentalmente in laboratorio.
Si circoscriveranno alcuni aspetti dell'interazione delle particelle elementari con la materia e semplici metodologie di elaborazione di dati sperimentali per verificare le proprietà di schermaggio di alcuni materiali.
Verranno inoltre descritte le catene di decadimento di alcuni sorgenti radioattive utilizzate per la certificazione della linearità della risposta di rivelatori di radioattività.
I dati raccolti durante le 5 sedute obbligatorie di laboratorio permetteranno di valutare quantitativamente alcune grandezze radiometriche.

Organizzazione del Laboratorio:

- c'è **obbligo di frequenza**; non sono ammessi ritardi all'inizio delle esperienze.

- Si opererà in gruppi di tre studenti. E' obbligatoria la **prenotazione** che andrà effettuata entro il 7 marzo via e-mail (adalberto.sciubba@uniroma1.it - oggetto: GRUPPI Laboratorio) comunicando i nomi di massimo altri due componenti del gruppo. Venerdì 10 marzo le formazioni verranno comunicate in rete e con avviso cartaceo nella bacheca del laboratorio.
Chi non fosse regolarmente iscritto al primo anno di Ingegneria biomedica non potrà accedere al corso.

- Le cinque esperienze si svolgeranno a via Scarpa (9:00–13:00, massima puntualità) di mercoledì. La prima sarà il 29 marzo.

- In laboratorio i dati raccolti andranno via via riportati in un apposito quaderno insieme alla loro elaborazione (svolta durante la seduta di laboratorio).
Sul retro del quaderno andranno elaborate, a partire dai dati raccolti, altre quantità che verranno indicate di volta in volta.

- Per essere ammessi all'orale occorrerà aver consegnato in tempo (entro il 31 maggio) il quaderno di laboratorio con le elaborazioni richieste.
Del quaderno verrà valutato solo il retro al fine di individuare un'idoneità a sostenere l'orale.
In caso contrario, a partire da una copia del quaderno effettuata prima della sua consegna, andrà effettuata una nuova elaborazione da consegnare almeno 15 giorni prima della data prevista per l'eventuale orale.

- L'uso della strumentazione e la discussione dei risultati delle misure (si dovrà dimostrare di aver capito cosa è stato fatto in laboratorio e perché) costituirà parte della prova d'esame che si svolgerà contestualmente a quella relativa agli altri aspetti teorici del corso.

21 febbraio 2016
Adalberto Sciubba

Seguono degli appunti preliminari su quanto verrà svolto durante le prime lezioni.

CENNI DI PROBABILITÀ E STATISTICA APPLICATE ALLA TEORIA DELLA MISURA

La natura casuale di molti fenomeni che saranno trattati nel corso obbliga a un accenno ad alcuni concetti di base di calcolo delle probabilità e di statistica. Questi elementi verranno discussi senza nessuna pretesa di rigore e completezza come invece avviene negli insegnamenti dedicati a tali discipline.

Ripercorriamo brevemente con un esempio quanto già appreso in corsi precedenti allo scopo di trovare un linguaggio comune.
Supponiamo voler contare quanti raggi cosmici attraversano nell'arco di un'ora l'elemento sensibile (scintillatore) di un dosimetro.

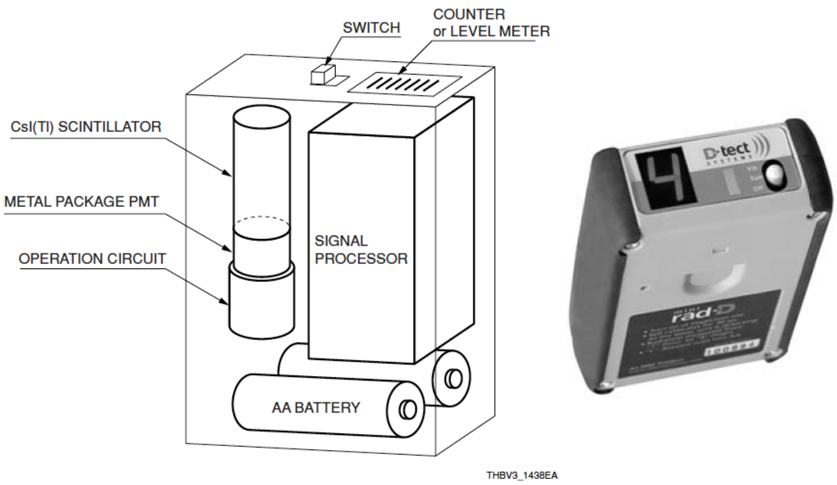


Foto estratta dalle note applicative, capitolo 14
http://www.**hamamatsu**.com/resources/pdf/etd/PMT_handbook_v3aE.pdf

Lo strumento viene attivato e dopo un minuto segnala che è stato attraversato da 6 raggi cosmici: "mediamente" un raggio cosmico ogni 10 s.

Quindi i conteggi in un'ora saranno: 60 min x 6 conteggi/min = 360 conteggi.

Questo tipo di ragionamento apparentemente ovvio sottintende una serie di passaggi non banali. Il conteggio effettuato sui dati sperimentali è un valore statistico e quindi certo: 6 conteggi! Ma cosa succederebbe se ripetessimo la misura? L'istante del passaggio nel sensore di un raggio cosmico non è correlato a quello di un altro raggio proveniente da un altro punto dello spazio: il fenomeno non è periodico con periodo 10 s.
Se analizzassimo un altro intervallo di un minuto potremmo ottenere ancora 6 conteggi ma anche 5 o 7 o…: non si è in grado di prevedere con certezza cosa succederebbe ma ci aspettiamo un risultato non molto diverso da una misura all'altra.

Stiamo assumendo implicitamente che l'osservazione sperimentale derivi (inferenza statistica) da una distribuzione di probabilità dei valori assunti dalla variabile aleatoria K (numero di raggi cosmici in un minuto) il cui valor medio corrisponde alla nostra osservazione di 6 conteggi. Poi, confidenti in quella distribuzione di probabilità possiamo stimare con un sufficiente livello di confidenza che in un intervallo di un'ora il numero di conteggi sarà 360.

Il problema di base in ogni misurazione consiste quindi nel determinare quale sia la distribuzione di probabilità dalla quale sono state generate le N misure ottenute (in altri gerghi si direbbe che è stato estratto un campione di potenza N o che è stata osservata una popolazione di N individui o …).

E' indispensabile conoscere in dettaglio la distribuzione di probabilità relativa al fenomeno in esame? Ottenere le informazioni necessarie implica una campagna di misure tanto più vasta (e costosa) quanto meglio si vogliono conoscerne i particolari (al limite $N \rightarrow \infty$).
Fortunatamente le distribuzioni dei risultati sperimentali sono sufficientemente "regolari" per cui spesso è sufficiente ricavare poche informazioni per essere in grado di elaborare buone previsioni. In molte applicazioni è sufficiente conoscere un valore centrale (la media) e un valore legato alla dispersione dei valori intorno alla media (la varianza).

Rivediamo in dettaglio queste affermazioni, rapidamente, ma per gradi…

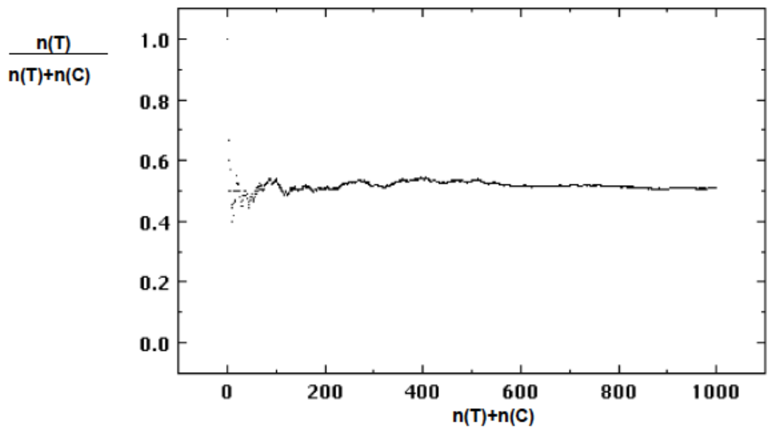
Cominciamo dalla definizione di probabilità: **grado di fiducia nel verificarsi di un evento**
Quello strumento si guasterà entro fine anno? Per quando devo programmarne la manutenzione? Quanti pezzi di ricambio devo avere di scorta? Quel nucleo radioattivo decadrà? Quando sarò attraversato dal prossimo raggio cosmico?

Dato un evento assegniamo una probabilità p alla possibilità che esso si verifichi. Come determiniamo p?

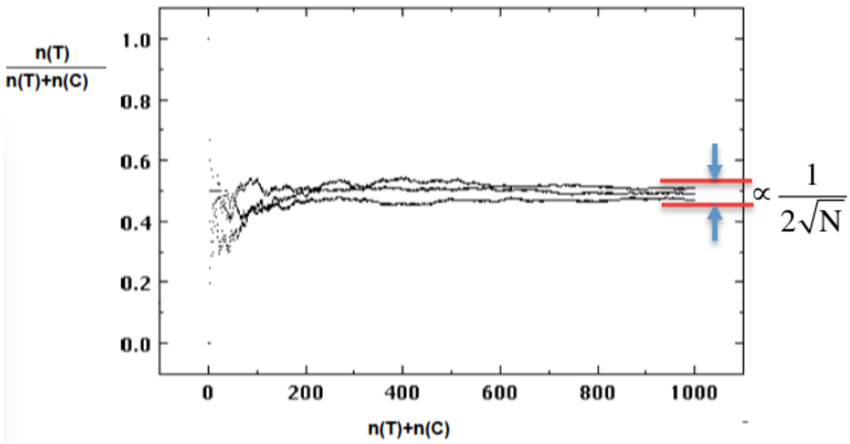
Secondo la <u>teoria assiomatica</u> :
- la probabilità p è un numero non negativo tale che:
- p = 1 corrisponde all'evento certo,
- dati due eventi tali che il verificarsi dell'uno escluda la possibilità di verificarsi dell'altro (eventi incompatibili o mutamente esclusivi) allora la probabilità che si verifichino o A o B è P(A o B) = P(A) + P(B),
- dati due eventi statisticamente indipendenti, tali cioè che il verificarsi dell'uno non altera la probabilità di verificarsi dell'altro, allora la probabilità che si verifichino congiuntamente A e B è P(A e B) = P(A) x P(B)

Un metodo diverso per determinare la probabilità di realizzarsi di un evento consiste nell'osservare (<u>teoria frequentista</u>) il fenomeno N volte, contare quante volte k (frequenza) si verifica l'evento e calcolare il rapporto k/N (frequenza relativa).
- k/N è compreso fra 0 (l'evento non si verifica mai) e 1 (sempre).

Analizziamo la relazione fra p e k/N utilizzando come esempio il lancio di una moneta non truccata per ci aspettiamo che la probabilità che esca testa (T) sia p = 0,5 = 50%.
Vediamo cosa può succedere al crescere del numero N di lanci.
Inizialmente la frequenza relativa varia molto: per N = 1 la frequenza relativa può valere 0 o 1, per N = 2 può valere 0 o 0,5 o 1 e per N = 3 può valere 0 o 0,33 o 0,67 o 1 e così via.
Al crescere di N la frequenza relativa tende a 0,5 ma non in modo monotono.
Le variazioni casuali intorno al valore 0,5 vengono dette **fluttuazioni statistiche**.



Data la natura aleatoria del fenomeno, se l'osservazione venisse ripetuta altre volte, si avrebbero andamenti simili ma non identici.



Tuttavia al crescere di N l'ampiezza delle fluttuazioni si riduce[1] e la frequenza relativa tende a:

$$\lim_{N\to\infty} k/N = p$$

Questa relazione (legge forte dei grandi numeri) sottintende che le prove siano **indipendenti**, cioè che l'esito di una prova non influenzi l'esito delle prove successive (il caso non ha memoria – da ricordare se al gioco del Lotto si vuole puntare sull'uscita dei numeri ritardatari).
E se la moneta fosse truccata? Con questo metodo si osserverebbe che il limite della frequenza relativa non sarebbe p = 0,5 ma p'. Noto p' si può prevedere cosa succederà in futuro: su N tentativi (con N sufficientemente grande) l'evento testa uscirà mediamente N p' volte[2].

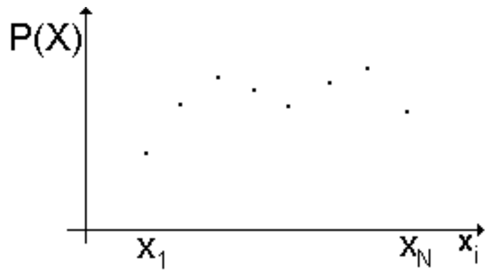
Il lancio di una moneta è un processo di tipo binomiale: l'evento ha due modalità mutuamente esclusive di presentarsi (testa-croce, sì-no, vero-falso, 0-1, acceso-spento…). Detta p la probabilità di verificarsi di una modalità, quella dell'altra modalità avrà probabilità q = 1 - p di presentarsi.
La distribuzione binomiale o di Bernoulli (che non tratteremo in questo corso) calcola la probabilità con cui, su N prove tra di loro indipendenti, k volte si verifica la modalità con probabilità p e le restanti N-k volte si realizza l'evento complementare:

$$p(k) = N!/[k!\,(N-k)!]\; p^k q^{N-k}$$

[1] Per una distribuzione binomiale di parametri N e p = ½ si ha: $\sigma^2(K) = Npq = N/4$ da cui si ricava $\sigma(K)/N = ½/\sqrt{N}$; inoltre E(K/N) = E(K)/N = Np/N = p

[2] Per una distribuzione binomiale di parametri N, p' si ha E(K) = N p'

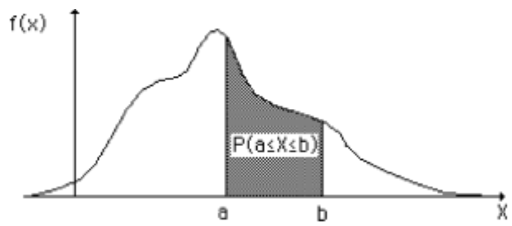
Cosa succede se un determinato fenomeno può avere più di due esiti (si pensi ai 6 possibili risultati del lancio di un dado)? Anche in questo caso il valore del risultato non è determinato ma dipende dal caso: è una **variabile aleatoria** (discreta) X il cui i-mo valore x_i si verifica con una probabilità $P(x_i)$.
La funzione P(X) che associa le probabilità agli N possibili valori della v.a. X è la distribuzione di probabilità di X.



Assiomaticamente qualsiasi funzione P(X) può essere considerata una distribuzione di probabilità purché per ogni x_i risulti $1 \geq P(x_i) \geq 0$ e se $P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_N) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$.

Quest'ultima relazione (**proprietà di chiusura**) deriva dal fatto che è certo (p = 1) che in una prova si otterrà almeno uno di tutti i possibili valori della v.a. (nel caso del lancio di un dado non truccato ci aspettiamo che ogni numero esca con probabilità 1/6: le 6 probabilità sono uguali e la loro somma vale 1).

Non sempre i valori associati ai diversi fenomeni come, ad esempio, il conteggio di guasti di un'apparecchiatura in un certo intervallo di tempo, sono discreti. Si pensi al tempo che intercorre fra un guasto e il successivo. In questo caso la **variabile aleatoria** tempo è **continua** e non ha più senso chiedersi quale sia la probabilità che X assuma uno dei suoi infiniti valori.
Sarà invece utile definire la probabilità infinitesima che X assuma un valore compreso fra x e x+dx: $dP(x) = dP(x \leq X < x+dx) = f(x)\,dx$ dove $f(x) = dP(x)/dx$ è la densità di probabilità o funzione di distribuzione (attenzione: in altri corsi/testi potreste trovare associato al simbolo f(x) un significato probabilistico diverso).



Graficamente la probabilità che X assuma un particolare valore all'interno di un intervallo altri non è che l'area racchiusa al di sotto della densità di probabilità in quell'intervallo. Se la f(x) è una funzione di distribuzione allora, considerando la **proprietà di chiusura**, si ha: $\int f(x)\,dx = 1$ qualora l'integrale venga calcolato su tutto l'insieme di definizione della v.a. X. Infatti $\int f(x)\,dx$ = P(X = un qualsiasi valore x) = P(evento certo) = 1.

La f(x) contiene tutta l'informazione necessaria per fare previsioni ma conoscerla richiede una quantità infinita di misure. Tuttavia per moltissimi scopi pratici è sufficiente individuare solo alcuni riassunti (indici). Il primo è un indice di posizione che individua sull'asse reale il punto "intorno al quale è centrata" la distribuzione dei possibili valori della v.a.
Simbolicamente viene definito come **valore atteso** (o valore previsto) o media[3]

m = E(X) con E(X) definita da:

v.a. discreta: $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i)$ v.a. continua $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$

Si noti l'analogia meccanica col baricentro di un sistema di masse $P(x_i)$ nelle posizioni x_i.

❖ Esercizio: verificare che il valor medio del risultato del lancio di un dado è 3,5

[3] NON è la media aritmetica: la media è definita in campo probabilistico, la media aritmetica in quello statistico

❖ Esercizio: dimostrare che E(aX+b) = a E(X) + b

Un secondo indice (di dispersione) quantifica la variabilità della v.a. intorno alla media.
Si definisce **varianza** la quantità

$$Var(X) = E[(X-m)^2]$$

v.a. discreta: $Var(X) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2 P(x_i)$ v.a. continua $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)dx$

Dato che la varianza ha le dimensioni fisiche della grandezza X^2 si introduce ai fini pratici la grandezza $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ detta scarto quadratico medio o **deviazione standard** che è omogenea alla grandezza X.

❖ Esercizio: dimostrare che $E[(X-m)^2] = E(X^2)-E^2(X)$

❖ Esercizio: verificare che la deviazione standard della distribuzione dei risultati del lancio di un dado vale $\sigma(X) = \sqrt{35/12}$

❖ Esercizio: dimostrare che $\sigma(aX+b) = a\,\sigma(X)$

Data una qualsiasi distribuzione è possibile calcolare la probabilità che la v.a. sia compresa nell'intervallo (detto **intervallo di confidenza**) $m-\sigma < X < m+\sigma$. Molte delle distribuzioni di uso comune hanno la caratteristica che all'interno di questo intervallo la probabilità (**livello di confidenza**) è molto elevato. Ovviamente allargando l'intervallo di confidenza aumenta il livello di confidenza. Spesso si utilizza l'intervallo $m - 2\sigma < X < m + 2\sigma$.

❖ esercizio: verificare che nell'intervallo $m-\sigma < X < m+\sigma$ il livello di confidenza per il lancio di un dado è 2/3 (in altri termini: la probabilità che il valore della v.a. sia compreso fra 1,79 e 5,21 è del 66,7%).

La probabilità che una v.a. assuma un particolare valore, il suo valore atteso e la varianza sono grandezze probabilistiche che richiedono per il loro calcolo la conoscenza completa della distribuzione di probabilità.
Tuttavia, a partire da un insieme di N osservazioni sperimentali del fenomeno è possibile calcolare delle grandezze statistiche che al tendere di N a infinito costituiscono delle stime dei riassunti della distribuzione.

Abbiamo già detto della frequenza relativa e della probabilità p. Analogamente la media può essere stimata attraverso la media aritmetica $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$ e la deviazione standard attraverso la **deviazione standard sperimentale** $\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{N-1}}$.

PROBABILITA'	**<-->**	**STATISTICA**
p	$\approx$	k/N
$m = E(X)$	$\approx$	$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$
$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	$\approx$	$\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{N-1}}$

Distribuzione di Poisson

Supponiamo l'esistenza di un numero N di eventi **indipendenti**, ognuno con probabilità p di verificarsi e probabilità q = 1- p di non verificarsi. E' possibile definire una v.a. K che conta il numero di eventi che si verificano. Posto m = Np numero atteso di successi, nel limite in cui N tende a infinito e p a zero (**eventi rari**), si ottiene la distribuzione di Poisson:

$P_m(k) = \frac{e^{-m}m^k}{k!}$ in cui $0 \le k < \infty$

E' possibile dimostrare che:

$E(K) = m$

$Var(K) = m.$

A prima vista il fatto che nella poissoniana risulti $\sigma^2 = m$ potrebbe far pensare ad un errore di calcolo dimensionale; in realtà la v.a. della distribuzione di Poisson è un numero puro !

❖ Esercizio: verificare che la distribuzione di Poisson gode della proprietà di chiusura

❖ Riflessione: perché possono essere considerati eventi rari i circa 200 raggi cosmici che ogni secondo colpiscono un individuo?

Questa distribuzione è stata utilizzata per la prima volta nella conta dei globuli rossi: del numero enorme contenuto nel volume di 1 cm³ di un prelievo standard solo una frazione irrisoria viene posta su un vetrino da microscopio con una camera di volume noto. L'esito k del conteggio, limitato in questo modo a poche centinaia di globuli rossi, è quindi soggetto a fluttuazioni statistiche: con elevata probabilità, però, il numero m cercato è compreso nell'intervallo $k - \sqrt{k} < m < k + \sqrt{k}$ → $m = k \pm \sqrt{k}$

Come esempio analizziamo la distribuzione per m = 2,5

$k = 0 \rightarrow P_{2,5}(0) = \frac{e^{-2,5}2,5^0}{0!} = 8,2\ \%$

$k = 1 \rightarrow P_{2,5}(1) = \frac{e^{-2,5}2,5^1}{1!} = 20,5\ \%$

$k = 2 \rightarrow P_{2,5}(2) = \frac{e^{-2,5}2,5^2}{2!} = 25,7\ \%$

$k = 3 \rightarrow P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5}2,5^3}{3!} = 21,4\ \%$

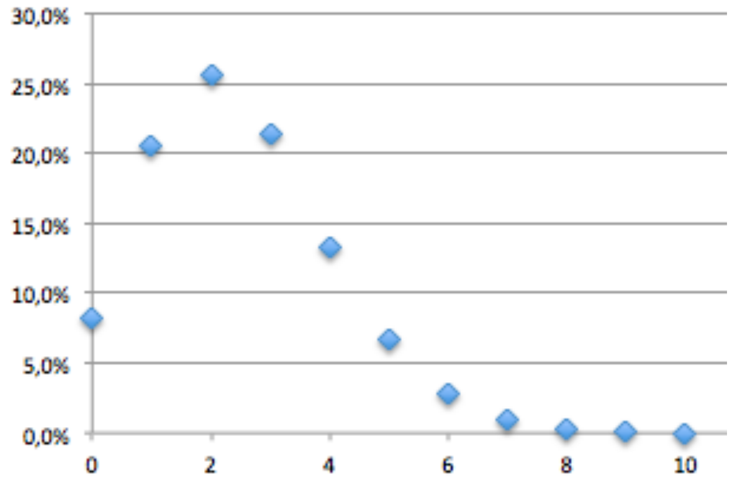
$k = 4 \rightarrow P_{2,5}(4) = \frac{e^{-2,5}2,5^4}{4!} = 13,4\ \%$

$k = 5 \rightarrow P_{2,5}(5) = \frac{e^{-2,5}2,5^5}{5!} = 6,7\ \%$

$k = 6 \rightarrow P_{2,5}(6) = \frac{e^{-2,5}2,5^6}{6!} = 2,3\ \%$

$k = 7 \rightarrow P_{2,5}(7) = \frac{e^{-2,5}2,5^7}{7!} = 1,0\ \%$

$k = 8 \rightarrow P_{2,5}(8) = \frac{e^{-2,5}2,5^8}{8!} = 0,3\ \%$



Calcoliamo la probabilità che $m - \sigma < k < m + \sigma$ è $2,5-1,58 < k < 2,5+1,58$ → $0,92 < k < 4,08$.

Questa condizione è soddisfatta per i valori k = 1, 2, 3, 4 che corrisponde a un livello di confidenza del 20,5 + 25,7 + 21,4 + 13,4 = 81,0 %.

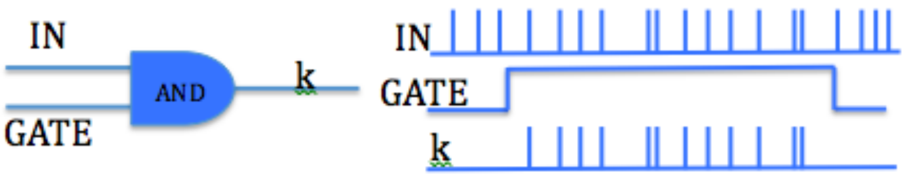
❖ esempio: 5000 cellule vengono irraggiate. Sapendo che la loro probabilità di sopravvivenza è 0,05% qual è la probabilità di trovarne vive esattamente 3? E almeno 3?

Il valore medio è dato da Np= 5000*0,0005=2,5. $P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5}2,5^3}{3!} = 21,4\ \%$. La probabilità che siano almeno 3 si ottiene sommando tutte le probabilità da k = 3 fino a infinito… Più brevemente, utilizzando la proprietà di chiusura, si può scrivere P(0)+P(1)+P(2)+P(3≤k) = 1 e quindi P(3≤k) = 1 - (8,2+20,5+25,7)% = 1 - 54,4% = 45,6%

❖ Esempio: un particolare tipo di apparecchiatura è noto per avere un tasso di guasti di uno ogni 2 anni. Qual è la probabilità che in un anno non abbia guasti? E di averne uno o più di uno?

m = 1/2 = 0,5 → $P_{0,5}(0) = \frac{e^{-0,5}0,5^0}{0!}$ = 60,7 %; $P_{0,5}(1 \leq k)$ = 1- $P_{0,5}(0)$ = 39,3%

Durante un'esperienza di laboratorio studieremo il numero di eventi di radioattività ambientale che casualmente vengono rivelati da un contatore a scintillazione. Semplificandolo al massimo, il sistema di acquisizione dei dati ha una sezione che lascia passare al dispositivo digitale di conteggio solo gli eventi che si presentano temporalmente in coincidenza con il segnale di GATE aperto:



Supponiamo di avere una frequenza (rateo o, all'inglese *rate*) di m = 2,5 eventi al secondo. Che distribuzione del numero di conteggi ci aspettiamo se la durata del GATE è 1 s? Ovviamente m = 2,5/s x 1s = 2,5. Se gli eventi sono indipendenti ci aspettiamo la distribuzione di Poisson con m = 2,5 già graficata.

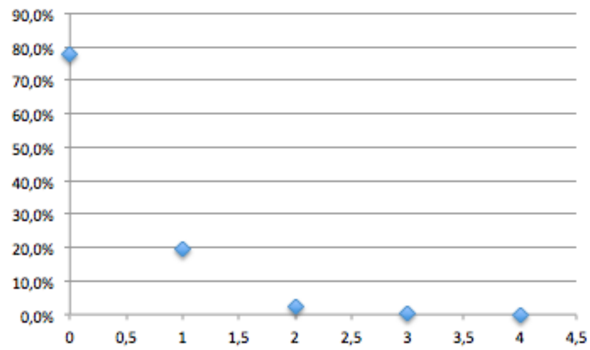
E se, invece, il GATE durasse 0,1 s?
Allora avremmo m = 0,25.

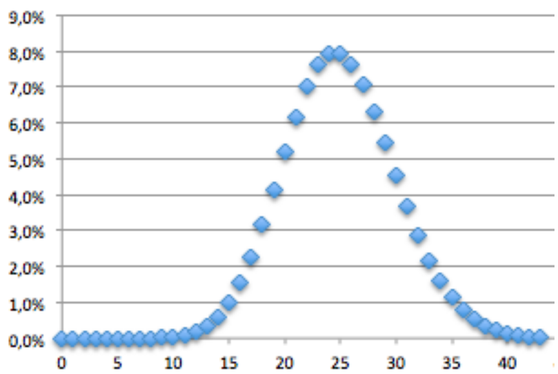
k = 0 → $P_{0,25}(0) = \frac{e^{-0,25}0,25^0}{0!}$ = 77,9 %

k = 1 → $P_{0,25}(1) = \frac{e^{-0,25}0,25^1}{1!}$ = 19,5 %

k = 2 → $P_{0,25}(2) = \frac{e^{-0,25}0,25^2}{2!}$ = 2,4 %

k = 3 → $P_{0,25}(3) = \frac{e^{-0,25}0,25^3}{3!}$ = 0,2 %



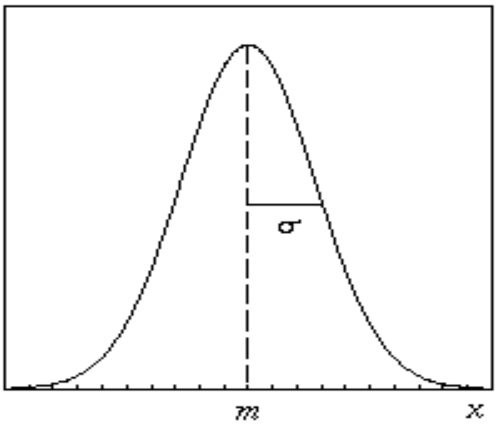


Se infine la durata del gate fosse di 10 secondi allora si avrebbe m = 2,5/s x 10 s = 25 e la distribuzione assumerebbe una forma simmetrica "a campana".

Questa è una caratteristica comune a tutte le distribuzioni di probabilità: nel limite in cui il loro valore medio è molto elevato (tende a infinito) approssimano sempre più una particolare distribuzione (teorema del limite centrale): la distribuzione di Gauss.

Distribuzione di Gauss

Dato un valore x = m, se k eventi indipendenti ne aumentano, ognuno con probabilità p = 1/2, il valore di una quantità Δ e N-k eventi ne diminuiscono, ognuno con probabilità q = 1 - p =1/2 il valore della stessa quantità Δ, posto $\sigma^2 = Np(1-p)\,\Delta$, allora $X = m + k\,\Delta - (N-k)\,\Delta$. Nel limite di N che tende all'infinito mentre Δ va a zero, X diventa una v.a. continua con la distribuzione:



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

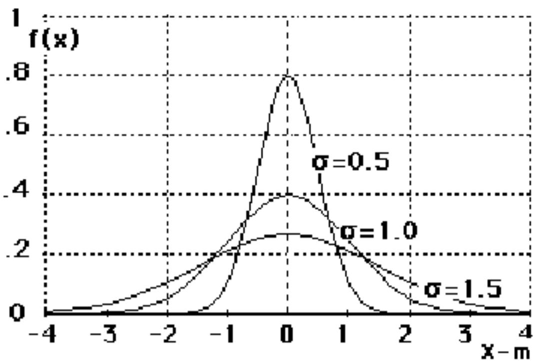
Applicando le definizioni si può verificare che la funzione gode della proprietà di chiusura e che, come prevedibile, E(X) = m e Var(X) = σ^2.

I flessi della funzione sono per i valori di $x = m \pm \sigma$.

$P(m - \sigma < x < m + \sigma) = 68{,}3\%$
$P(m - 2\sigma < x < m + 2\sigma) = 95{,}4\%$
$P(m - 3\sigma < x < m + 3\sigma) = 99{,}7\%$

Dall'espressione del massimo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ (detto modulo di precisione) si deduce immediatamente che tanto più aumenta σ tanto più la curva si abbassa (mantenendo l'integrale unitario).

La precisione di un sistema di misura è la capacità di fornire la stessa risposta a parità di sollecitazione. Gli errori casuali alterano la risposta rendendo imprecisa la misura. La distribuzione degli errori segue la distribuzione di Gauss ed è quindi utilizzabile per stimare la risoluzione di uno strumento. La utilizzeremo per caratterizzare la risoluzione nella misura di energia effettuata con un contatore a scintillazione.



❖ Esercizio: verificare che la larghezza della funzione, calcolata a mezza altezza (Full Width at Half Maximum), è pari a FWHM = $2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma = 2{,}35\,\sigma$

❖ Esercizio: verificare che la probabilità che una misura distribuita gaussianamente sia più grande del valor medio di una quantità 2 σ è pari al 2,3%

Distribuzione esponenziale

Ipotizziamo un processo poissoniano per il quale ci si attende una frequenza di r conteggi nell'unità di tempo[4] (e quindi in media m = r t eventi nell'intervallo $0 \div t$) e chiediamoci quale sia la distribuzione del tempo t che intercorre fra un evento e il successivo.
L'istante t* in cui si verifica l'evento è una v.a. continua e quindi ne va definita la probabilità infinitesima: $dP(t<t^*<t+dt)$.
Questa probabilità è fattorizzabile col prodotto della probabilità che non avvengano eventi nell'intervallo finito $0 \div t$ moltiplicata per la probabilità (infinitesima) che avvenga un evento nell'intervallo $t \div t+dt$:
$dP(t<t^*<t+dt) = P_{rt}(0)\, dP_{rdt}(1) = e^{-rt}\, dP_{rdt}(1) = e^{-rt}[\frac{e^{-rdt}(rdt)^1}{1!}] = e^{-rt}[e^{-rdt} rdt]$.
Sviluppando in serie di potenze l'esponenziale e fermandosi al primo termine in rdt (cioè $e^{-rdt} \sim 1$) si ottiene: $dP(t<t^*<t+dt) = f(t)\, dt = e^{-rt}\, rdt$.
Da $f(t)\, dt = re^{-rt}dt$ si ottiene che la **distribuzione dei tempi d'arrivo** è **esponenziale**:

$f(t) = re^{-rt}$ con $0 \leq t < \infty$ dalla quale si può dedurre:

$E(t) = 1/r$

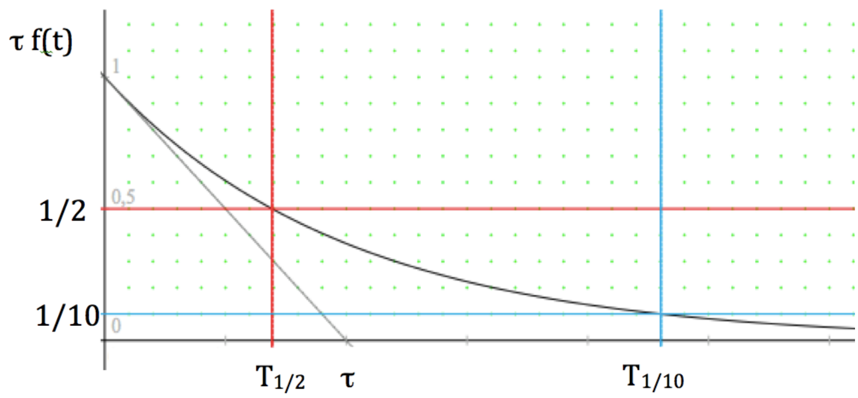
$Var(t) = 1/r^2$

L'inverso della frequenza r è un tempo $\tau = 1/r$ caratteristico dell'andamento esponenziale: $E(t) = 1/r = \tau$ è il tempo che in media trascorre fra il verificarsi di un evento e il successivo (nel caso del decadimento di nuclei radioattivi τ è detto vita media)
La distribuzione $f(t) = re^{-rt}$ può quindi essere riscritta come $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

❖ Esercizio: verificare la proprietà di chiusura della funzione esponenziale

❖ Esercizio: verificare che per la distribuzione esponenziale $E(t) = \tau$.

❖ Esempio: determiniamo per la distribuzione esponenziale il tempo $T_{1/2}$ entro il quale l'evento ha una probabilità del 50% di verificarsi.
Si tratta di integrare $f(t) = 1/\tau\ e^{-t/\tau}$ fra 0 e $T_{1/2}$ e porre il risultato pari a 0,5:
$\int_0^{T_{1/2}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau\ e^{-T_{1/2}/\tau} = 0{,}5 \rightarrow T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0{,}69\ \tau$.



❖ Esercizio: analogamente al tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ si può determinare l'istante $T_{1/10}$ prima del quale c'è una probabilità del 90% del verificarsi dell'evento (e quindi una probabilità 1/10 che ancora non si sia verificato). Verificare che ora il calcolo svolto precedentemente porta a $0{,}1 = e^{-\frac{T_{1/10}}{\tau}}$ e quindi che il tempo $T_{1/10} = \tau \ln 10 = 2{,}30\ \tau$.

[4] r (rateo di conteggi o "*rate*" in inglese) è un frequenza temporale: si misura in hertz

❖ Esercizio: dopo quante costanti di tempo τ si ha una probabilità del 25% = 1/4 che l'evento non si sia ancora verificato?

❖ Esercizio: dopo quante costanti di tempo τ si ha una probabilità del 5% = 1/20 che l'evento non si sia ancora verificato?

Il caso di più variabili aleatorie

Prese due variabili aleatorie X e Y, ognuna la propria distribuzione di probabilità f(x) e f(y), e quindi valori medi E(X) e E(Y) e varianze Var(X) e Var(Y), è utile esaminarne la combinazione lineare Z = a X + b Y.
Basandosi sulla linearità dell'operatore E() si ha che **E(Z) = a E(X) + b E(Y)**.
Inoltre, se X e Y sono statisticamente indipendenti, allora la distribuzione di probabilità f(x,y) che si verifichino contemporaneamente X e Y è data da f(x,y) = f(x) f(y) da cui si ricava che $Var(Z) = a^2\, Var(X) + b^2\, Var(Y)$ → **$\sigma(a\,X + b\,Y) = \sqrt{[a\,\sigma(X)]^2 + [b\,\sigma(Y)]^2}$**.

Nel caso in cui Z = X ± Y (cioè a =1 e b = ±1) si ottiene $\sigma(X \pm Y) = \sqrt{[\sigma(X)]^2 + [\sigma(Y)]^2}$.

Quest'ultima relazione è particolarmente utile nel caso degli N conteggi dovuti alla somma di due contributi originati, per esempio, uno da eventi di radioattività e uno dal rumore di fondo elettronico del dispositivo di rivelazione.

In questi casi si possono eseguire due misure: il numero di conteggi F di fondo del solo rivelatore ottenuto allontanandosi dalla sorgente radioattiva e il numero totale di conteggi dato dalla radioattività (segnale S incognito da quantificare) e dal fondo: N = S + F.
Banalmente S = N – F[5].
Ma con quale incertezza è noto S? $\sigma(S) = \sigma(N-F) = \sqrt{[\sigma(N)]^2 + [\sigma(F)]^2}$ e, dato che sia N che F sono conteggi che seguono la statistica poissoniana, si ha $\sigma(N)=\sqrt{N}$ e $\sigma(F)=\sqrt{F}$ e quindi $\sigma(S) = \sigma(N-F) = \sqrt{N + F}$

Caratteristiche della media aritmetica

Consideriamo la media aritmetica di N misure $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \sum \frac{1}{N} x_i$.
Questa espressione può essere vista come la combinazione lineare con coefficienti 1/N di N variabili aleatorie: l'indice i = 1, N in questo caso indicherebbe non la prima, seconda, terza misura… della v.a. X ma un valore assunto dalla v.a. X_1 (prima misura), un valore assunto dalla v.a. X_2 (seconda misura), un valore assunto dalla v.a. X_3 (terza misura)...
E' spesso ragionevole supporre che la distribuzione di probabilità della prima misura $f(x_1)$ sia la stessa della seconda misura e così per tutte le altre[6]: $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_N) = f(x)$ tutte con con $E(X_i) = m$ e $Var(X_i) = \sigma^2$.
Pertanto $E(\overline{X}) = \frac{1}{N}E(X_1) + \frac{1}{N}E(X_2) + \ldots = N\,\frac{1}{N}\,E(X) = m$ cioè il valore atteso della media aritmetica è la media e $Var(\overline{X}) = \frac{1}{N^2}\,Var(X_1) + \frac{1}{N^2}Var(X_2) + \ldots = N\,\frac{1}{N^2}\,Var(X) = \frac{1}{N}\,Var(X)$ da cui si ricava che

la deviazione standard della media aritmetica di N misure indipendenti è

$$\boldsymbol{\sigma(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\sigma(X)}$$

---

[5] si sta ipotizzando che le misure di N e F abbiano avuto la stessa durata temporale e che le frequenze del segnale e del fondo non siano variate durante le misure
[6] cioè che i risultati delle misure siano tra loro statisticamente indipendenti

Infine, sempre per via del teorema del limite centrale, la distribuzione di probabilità della media aritmetica di N misure $f(\overline{X})$ tende, nel limite $N \rightarrow \infty$, alla distribuzione di Gauss, a prescindere dalla distribuzione di probabilità f(x).

❖ Esercizio: calcolare per quanto tempo occorre acquisire eventi con frequenza di circa 10 Hz affinché tale frequenza sia nota al 5% (40 s)

❖ Esercizio: … e se la strumentazione avesse una frequenza di segnali di fondo pari a 7,5 Hz misurata per una pari durata temporale? (100 s)

RIASSUMENDO: il risultato di una serie di N misure della stessa grandezza X è rappresentato dalla media della distribuzione di probabilità di X: gli errori di misura alterano casualmente il valore m ora in eccesso, ora in difetto, all'incirca come avviene per la distribuzione di Gauss.
Dal punto di vista statistico quindi si stima:
- m con la media aritmetica
– $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ con $\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{N-1}}$.

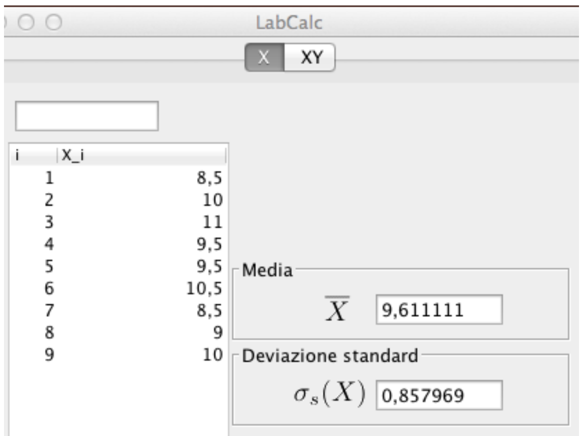
La media aritmetica compensa parzialmente le fluttuazioni in eccesso rispetto a m con quelle in difetto e quindi la sua precisione migliora. Si conviene quindi di riportare come risultato la media aritmetica e la sua incertezza $\sigma(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(X)$ che, statisticamente, diventa $\frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_s(X)$.

Il teorema del limite centrale, infine, per N sufficientemente grande garantisce che la distribuzione della media aritmetica è gaussiana e che quindi con elevata probabilità (circa 68% di livello di confidenza)
$m - \sigma(\overline{X}) < \overline{X} < m + \sigma(\overline{X}) \rightarrow \overline{X} - \sigma(\overline{X}) < m < \overline{X} + \sigma(\overline{X})$
che, statisticamente, diventa: $\overline{X} - \sigma_s(\overline{X}) < m < \overline{X} + \sigma_s(\overline{X})$.

Al crescere di N si ha che $\sigma_s(\overline{X})$ diminuisce (N al denominatore), quindi l'intervallo si stringe e la media aritmetica diventa una stima sempre più buona di m:

$$\mathbf{m \approx \overline{X} \pm \sigma_s(\overline{X}) = \overline{X} \pm \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}} = \overline{X} \pm \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{N-1}}}$$

❖ Esercizio: in una serie di 9 misure della stessa grandezza X si ottengono i seguenti risultati:
8,5 (2 volte)
9,0
9,5 (2 volte)
10,0 (2 volte)
10,5
Con una qualsiasi calcolatrice statistica si ottengono rapidamente la media aritmetica della serie di misure (9,611) e la deviazione standard (0,858).



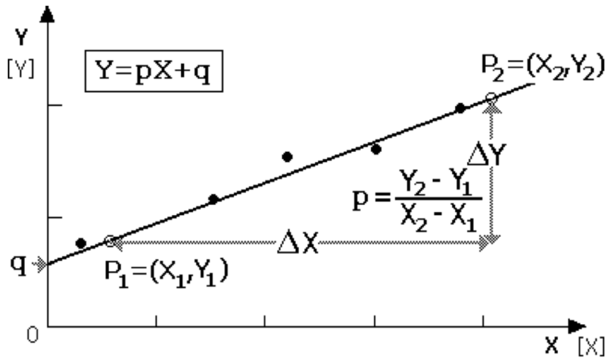
Perché la migliore stima del valore vero della grandezza misurata è X = 9,61±0,29?

Con un intervallo di confidenza di 3 deviazioni standard, perché il valore minimo che ci si può aspettare per una decima misura è 7,0?

Retta dei minimi quadrati

Spesso è necessario studiare la relazione fra due diverse grandezze fisiche, per esempio per tarare uno strumento o per studiare la risposta di un sistema ad uno stimolo variabile. Nel caso di una relazione lineare si può procedere anche manualmente realizzando un grafico con la risposta Y in ordinata e la sollecitazione X in ascissa: un andamento lineare è facilmente individuabile.
Ogni punto sul grafico è il risultato di una coppia di misure (x_i,y_i) entrambe affette da errori di misura: solo teoricamente si disporrebbero lungo una retta. In realtà, a seconda della precisione delle misure, i punti saranno più o meno ben allineati; in alcuni casi potrebbe essere addirittura problematico tracciare con un righello una retta che passi quanto più possibile nelle vicinanze di quanti più punti possibile.

Tuttavia anche una retta tracciata grossolanamente fornirebbe molte informazioni. La prima è che se si è riusciti a tracciarla l'andamento è lineare!



A questo punto diventa lecito ritenere che l'andamento teorico è descritto da Y = p X + q dove la pendenza p e l'intercetta q della retta approssimante diventano più significativi dei singoli punti misurati.
Per ricavare q basta considerare che è la distanza dall'origine dell'intersezione della retta con l'asse delle Y: q = Y(X=0); è sufficiente leggere sul grafico il valore con la sua unità di misura.
Per ricavare la pendenza e le sue unità di misura si scelgono arbitrariamente sulla retta due punti $P_1=(X_1, Y_1)$ e $P_2= (X_2, Y_2)$. Da $Y_1 = p X_1 + q$ e $Y_2 = p X_2 + q$ si ricava $p = (Y_2-Y_1)/(X_2-X_1)$.

Per una elaborazione meno approssimata si può ricorrere al metodo dei minimi quadrati che minimizza, al variare dei parametri p e q, i quadrati delle distanze dei singoli punti dalla retta Y = p X + q. L'elaborazione statistica di questa minimizzazione fornisce sia una stima di p e q:

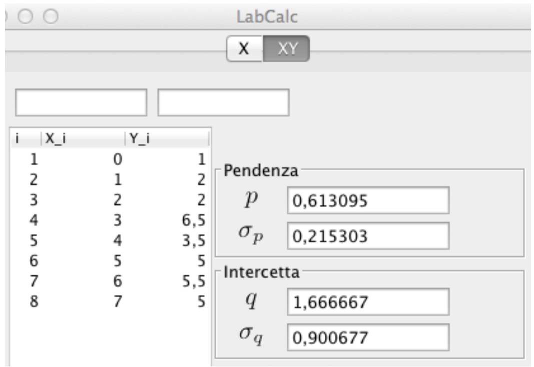
$$p = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \qquad q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

che le loro varianze:

$$\sigma^2(p) = \frac{N\ \sigma^2}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \qquad \sigma^2(q) = \frac{\sum x_i^2\ \sigma^2}{N\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \qquad \text{con}\ \ \sigma^2 = \frac{\sum[y_i - (px_i + q)]^2}{N-2}$$

Queste formule sono integrate nella calcolatrice statistica LabCalc sviluppata per le attività del Laboratorio Didattico di Fisica della Sapienza; può essere scaricata dal sito http://w3.uniroma1.it/labfis/download.html
Come si vede le incertezze delle stime di p e q sono legate alla quantità $\sigma^2 = \frac{\sum[y_i-(px_i+q)]^2}{N-2}$ che rappresenta sostanzialmente la distanza quadratica media delle coppie di misure (x_i,y_i) dalla retta: quanto più i punti sono ben allineati tanto più piccole sono le incertezze con cui si possono ricavare i parametri p e q.

❖ Esercizio: i risultati di una serie di 8 misure della sollecitazione X e della risposta Y vengono inseriti in una calcolatrice statistica per determinare se sia più precisa la stima della pendenza o dell'intercetta della retta che descrive la dipendenza di Y da X.
Viene prodotto un grafico dei punti misurati e se ne verifica la linearità. Risulta evidente che un punto è affetto da errori di misura eccessivi e quindi viene scartato. Rielaborando i dati dei punti rimasti si ottiene $\sigma(p)/p = 0{,}08/0{,}65 = 12\% < \sigma(q)/q = 0{,}35/1{,}09 = 32\%$



❖ Riflessione: spero, al termine di questa necessariamente rapida, superficiale e incompleta carrellata sul significato di aleatorietà della natura, che abbiate migliorato la conoscenza della relazione causa-effetto. Spesso la sua natura è contaminata da ragionamenti di fondo in cui l'osservazione statistica viene inconsciamente alterata dall'osservatore: contate quante volte non succede nulla passando sotto una scala, quando un gatto nero vi attraversa la strada, quando uno specchio si rompe e, soprattutto, quanti esami superate anche se avete correttamente stampato la ricevuta dell'esame prima di presentarvi all'orale…