

FISICA DELLE RADIAZIONI APPLICATA ALLA MEDICINA

A.A. 2014-15

Organizzazione del corso:

- 60 ore di teoria (Prof. Patera) - Lun Mar Gio
- 20 ore di lezioni di laboratorio (Prof. Sciubba) - Ven
- 20 ore di esercitazioni in laboratorio (Prof. Sciubba) - Merc
- Esame: Proff. Patera & Sciubba, commissione unica

Contenuti del corso

La medicina nucleare e la radiologia sono le principali branche della medicina che utilizzano le radiazioni per scopi diagnostici e terapeutici. La ricerca in questi settori punta al miglioramento dell'efficacia delle tecniche esistenti e allo sviluppo di nuove con lo scopo di incrementare la qualità delle prestazioni erogate e la prevenzione dei rischi per i pazienti, gli operatori e la popolazione in generale.

Questo corso illustra cosa sono le radiazioni ionizzanti, come interagiscono con la materia, quali effetti biologici producono e indica come utilizzarne gli effetti benefici in campo sanitario e limitarne i danni potenziali accennando, infine, alla normativa radioprotezionistica più rilevante.

In particolare il modulo di laboratorio del corso di Fisica delle radiazioni applicata alla medicina mira a sviluppare alcuni concetti di fisica relativi alla misura di grandezze radiometriche e, soprattutto, a far considerare la radioattività come uno strumento da maneggiare sì con cura ma che è in grado di permettere diagnosi e terapie altrimenti impossibili.

Le lezioni del modulo di laboratorio inizieranno col considerare la natura aleatoria delle misure e accennare ad alcuni elementi di base di calcolo delle probabilità e di statistica sufficienti per poter dedurre dai risultati delle misure i valori di alcune grandezze di interesse. Appena possibile gli aspetti teorici illustrati verranno verificati in una esperienza di laboratorio dedicata al conteggio di eventi radioattivi.

Seguirà la descrizione particolareggiata di un tipo di rivelatore utilizzato in alcune apparecchiature medicali dato che è parte integrante dell'attrezzatura in dotazione al laboratorio. Le caratteristiche del rivelatore verranno dettagliate ad un livello sufficiente per essere verificate sperimentalmente in laboratorio.

Si circonscriveranno alcuni aspetti dell'interazione delle particelle elementari con la materia e semplici metodologie di elaborazione di dati sperimentali per verificare le proprietà di schermaggio di alcuni materiali.

Verranno inoltre descritte le catene di decadimento di alcuni sorgenti radioattive utilizzate per la certificazione della linearità della risposta di rivelatori di radioattività.

I dati raccolti durante le 5 sedute obbligatorie di laboratorio permetteranno di valutare quantitativamente alcune grandezze radiometriche.

Organizzazione del Laboratorio:

- c'è **obbligo di frequenza**; non sono ammessi ritardi all'inizio delle esperienze.
- Si opererà in gruppi di tre studenti. E' obbligatoria la **prenotazione** che andrà effettuata entro il 6 marzo via e-mail (adalberto.sciubba@uniroma1.it - oggetto: GRUPPI) comunicando i nomi di massimo altri due componenti del gruppo. Lunedì 9 marzo le formazioni verranno comunicate in rete e con avviso cartaceo nella bacheca del laboratorio.
Chi non fosse regolarmente iscritto al primo anno di Ingegneria biomedica deve comunicarlo in fase di prenotazione.
- Le cinque esperienze si svolgeranno a via Scarpa (9:00–13:00, massima puntualità) a mercoledì alterni a partire dall'11 marzo.
- In laboratorio i dati raccolti andranno via via riportati in un apposito quaderno insieme alla loro elaborazione (svolta durante la seduta di laboratorio).
Sul retro del quaderno andranno elaborate, a partire dai dati raccolti, altre quantità che verranno indicate di volta in volta.
- Per essere ammessi all'orale occorrerà aver consegnato in tempo (entro il 29 maggio) il quaderno di laboratorio con le elaborazioni richieste.
Del quaderno verrà valutato solo il retro al fine di individuare un'idoneità a sostenere l'orale. In caso contrario, a partire da una copia del quaderno effettuata prima della sua consegna, andrà effettuata una nuova elaborazione da consegnare almeno 15 giorni prima della data prevista per l'eventuale orale.
- La discussione dell'elaborato (si dovrà dimostrare di aver capito cosa è stato fatto in laboratorio e perché) costituirà parte della prova d'esame che si svolgerà contestualmente a quella relativa agli altri aspetti teorici del corso.

La settimana del 2-6 febbraio le lezioni del modulo di teoria saranno sostituite da quelle di laboratorio. Il 4 febbraio non ci sarà laboratorio

23 febbraio 2015
Adalberto Sciubba

CENNI DI PROBABILITÀ E STATISTICA APPLICATE ALLA TEORIA DELLA MISURA

La natura casuale di molti fenomeni che saranno trattati nel corso obbliga a un accenno ad alcuni concetti di base di calcolo delle probabilità e di statistica. Questi elementi verranno discussi senza nessuna pretesa di rigore e completezza come invece avviene negli insegnamenti dedicati a tali discipline.

Ripercorriamo brevemente con un esempio quanto già appreso in corsi precedenti allo scopo di trovare un linguaggio comune.

Supponiamo voler contare quanti raggi cosmici attraversano nell'arco di un'ora l'elemento sensibile (scintillatore) di un dosimetro.

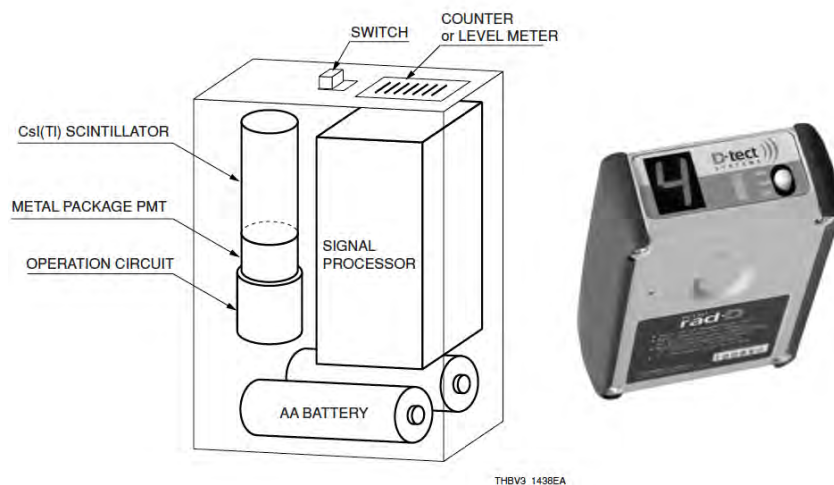


Foto estratta dalle note applicative, capitolo 14

http://www.hamamatsu.com/resources/pdf/etd/PMT_handbook_v3aE.pdf

Lo strumento viene attivato e dopo un minuto segnala che è stato attraversato da 6 raggi cosmici: "mediamente" un raggio cosmico ogni 10 s.

Quindi i conteggi in un'ora saranno: $60 \text{ min} \times 6 \text{ conteggi/min} = 360 \text{ conteggi}$.

Questo tipo di ragionamento apparentemente ovvio sottintende una serie di passaggi non banali. Il conteggio effettuato sui dati sperimentali è un valore statistico e quindi certo: 6 conteggi! Ma cosa succederebbe se ripetessimo la misura? L'istante del passaggio nel sensore di un raggio cosmico non è correlato a quello di un altro raggio proveniente da un altro punto dello spazio: il fenomeno non è periodico con periodo 10 s.

Se analizzassimo un altro intervallo di un minuto potremmo ottenere ancora 6 conteggi ma anche 5 o 7 o...: non si è in grado di prevedere con certezza cosa succederebbe ma ci aspettiamo un risultato non molto diverso da una misura all'altra.

Stiamo assumendo implicitamente che l'osservazione sperimentale derivi (inferenza statistica) da una distribuzione di probabilità dei valori assunti dalla variabile aleatoria K (numero di raggi cosmici in un minuto) il cui valor medio corrisponde alla nostra osservazione di 6 conteggi. Poi, confidanti in quella distribuzione di probabilità possiamo stimare con un sufficiente livello di confidenza che in un intervallo di un'ora il numero di conteggi sarà 360.

Il problema di base in ogni misurazione consiste quindi nel determinare quale sia la distribuzione di probabilità dalla quale sono state generate le N misure ottenute (in altri termini si direbbe che è stato estratto un campione di potenza N o che è stata osservata una popolazione di N individui o ...).

È indispensabile conoscere in dettaglio la distribuzione di probabilità relativa al fenomeno in esame? Ottenere le informazioni necessarie implica una campagna di misure tanto più vasta (e costosa) quanto meglio si vogliono conoscerne i particolari (al limite $N \rightarrow \infty$). Fortunatamente le distribuzioni dei risultati sperimentali sono sufficientemente "regolari" per cui spesso è sufficiente ricavare poche informazioni per essere in grado di elaborare buone previsioni. In molte applicazioni è sufficiente conoscere un valore centrale (la media) e un valore legato alla dispersione dei valori intorno alla media (la varianza).

Rivediamo in dettaglio queste affermazioni, rapidamente, ma per gradi...

Cominciamo dalla definizione di probabilità: **grado di fiducia nel verificarsi di un evento**
Quello strumento si guasterà entro fine anno? Per quando devo programmare la manutenzione? Quanti pezzi di ricambio devo avere di scorta? Quel nucleo radioattivo decadrà? Quando sarò attraversato dal prossimo raggio cosmico?

Dato un evento assegniamo una probabilità p alla possibilità che esso si verifichi. Come determiniamo p ?

Secondo la teoria assiomatica :

- la probabilità p è un numero non negativo tale che:
- $p = 1$ corrisponde all'evento certo,
- dati due eventi tali che il verificarsi dell'uno escluda la possibilità di verificarsi dell'altro (eventi incompatibili o mutuamente esclusivi) allora la probabilità che si verifichino A o B è $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$,
- dati due eventi statisticamente indipendenti, tali cioè che il verificarsi dell'uno non altera la probabilità di verificarsi dell'altro, allora la probabilità che si verifichino congiuntamente A e B è $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$

Un metodo diverso per determinare la probabilità di realizzarsi di un evento consiste nell'osservare (teoria frequentista) il fenomeno N volte, contare quante volte k (frequenza) si verifica l'evento e calcolare il rapporto k/N (frequenza relativa).

- k/N è compreso fra 0 (l'evento non si verifica mai) e 1 (sempre).

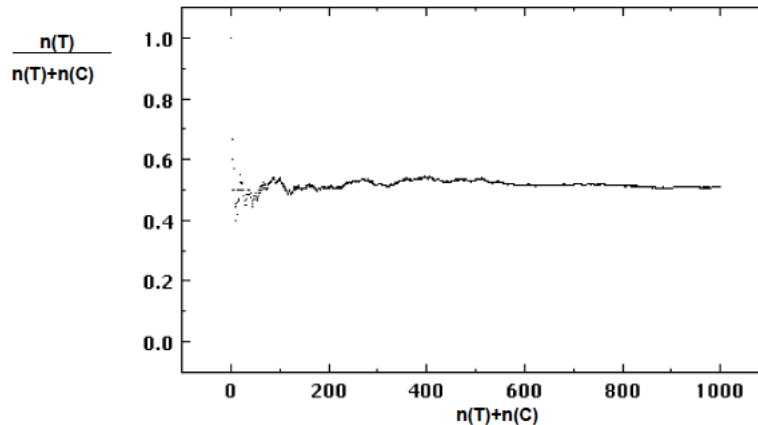
Analizziamo la relazione fra p e k/N utilizzando come esempio il lancio di una moneta non truccata per cui aspettiamo che la probabilità che esca testa (T) sia $p = 0,5 = 50\%$.

Vediamo cosa può succedere al crescere del numero N di lanci.

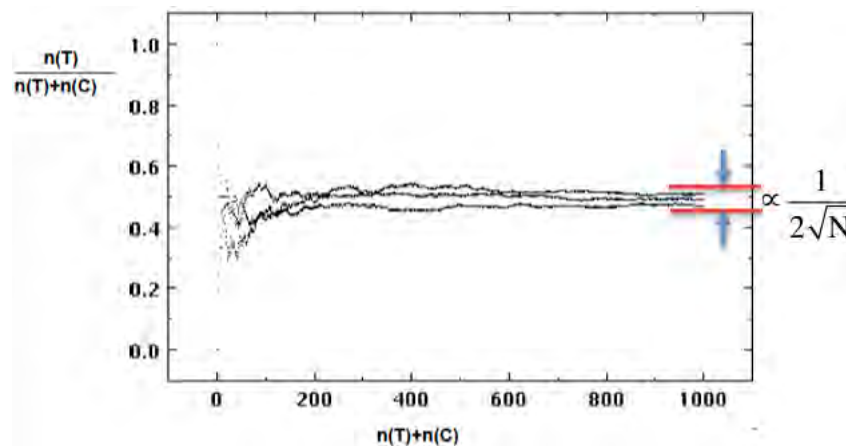
Inizialmente la frequenza relativa varia molto: per $N = 1$ la frequenza relativa può valere 0 o 1, per $N = 2$ può valere 0 o 0,5 o 1 e per $N = 3$ può valere 0 o 0,33 o 0,67 o 1 e così via.

Al crescere di N la frequenza relativa tende a 0,5 ma non in modo monotono.

Le variazioni casuali intorno al valore 0,5 vengono dette **fluttuazioni statistiche**.



Data la natura aleatoria del fenomeno, se l'osservazione venisse ripetuta altre volte, si avrebbero andamenti simili ma non identici.



Tuttavia al crescere di N l'ampiezza delle fluttuazioni si riduce¹ e la frequenza relativa tende a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k/N = p$$

Questa relazione (legge forte dei grandi numeri) sottintende che le prove siano **indipendenti**, cioè che l'esito di una prova non influenzi l'esito delle prove successive (il caso non ha memoria – da ricordare se al gioco del Lotto si vuole puntare sull'uscita dei numeri ritardatari).

E se la moneta fosse truccata? Con questo metodo si osserverebbe che il limite della frequenza relativa non sarebbe $p = 0,5$ ma p' . Noto p' si può prevedere cosa succederà in futuro: su N tentativi (con N sufficientemente grande) l'evento testa uscirà mediamente $N p'$ volte².

Il lancio di una moneta è un processo di tipo binomiale: l'evento ha due modalità mutuamente esclusive di presentarsi (testa-croce, sì-no, vero-falso, 0-1, acceso-spento...). Detta p la probabilità di verificarsi di una modalità, quella dell'altra modalità avrà probabilità $q = 1 - p$ di presentarsi.

La distribuzione binomiale o di Bernoulli (che non tratteremo in questo corso) calcola la probabilità con cui, su N prove tra di loro indipendenti, k volte si verifica la modalità con probabilità p e le restante N-k volte si realizza l'evento complementare:

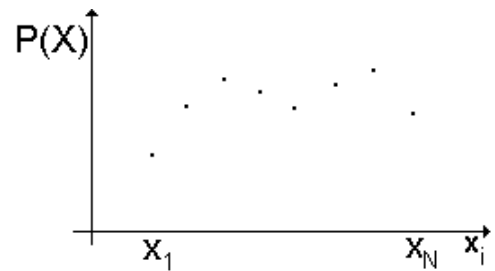
$$p(k) = N!/[k! (N-k)!] p^k q^{N-k}$$

¹ Per una distribuzione binomiale di parametri N e $p = 1/2$ si ha: $\sigma^2(K) = Npq = N/4$ da cui si ricava $\sigma(K)/N = 1/2\sqrt{N}$; inoltre $E(K/N) = E(K)/N = Np/N = p$

² Per una distribuzione binomiale di parametri N, p' si ha $E(K) = N p'$

Cosa succede se un determinato fenomeno può avere più di due esiti (si pensi ai 6 possibili risultati del lancio di un dado)? Anche in questo caso il valore del risultato non è determinato ma dipende dal caso: è una **variabile aleatoria** (discreta) X il cui i -mo valore x_i si verifica con una probabilità $P(x_i)$.

La funzione $P(X)$ che associa le probabilità agli N possibili valori della v.a. X è la distribuzione di probabilità di X .

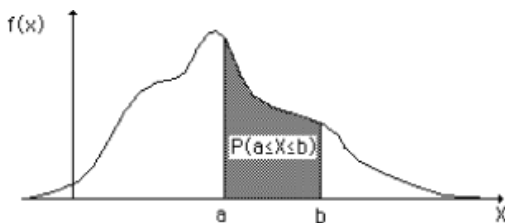


Assiomaticamente qualsiasi funzione $P(X)$ può essere considerata una distribuzione di probabilità purché per ogni x_i risulti $1 \geq P(x_i) \geq 0$ e se $P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_N) = \sum_{i=1}^N P(x_i) = 1$.

Quest'ultima relazione (**proprietà di chiusura**) deriva dal fatto che è certo ($p = 1$) che in una prova si otterrà almeno uno di tutti i possibili valori della v.a. (nel caso del lancio di un dado non truccato ci aspettiamo che ogni numero esca con probabilità $1/6$: le 6 probabilità sono uguali e la loro somma vale 1).

Non sempre i valori associati ai diversi fenomeni come, ad esempio, il conteggio di guasti di un'apparecchiatura in un certo intervallo di tempo, sono discreti. Si pensi al tempo che intercorre fra un guasto e il successivo. In questo caso la **variabile aleatoria** tempo è **continua** e non ha più senso chiedersi quale sia la probabilità che X assuma uno dei suoi infiniti valori.

Sarà invece utile definire la probabilità infinitesima che X assuma un valore compreso fra x e $x+dx$: $dP(x) = dP(x \leq X < x+dx) = f(x) dx$ dove $f(x) = dP(x)/dx$ è la densità di probabilità o funzione di distribuzione (attenzione: in altri corsi/testi potreste trovare associato al simbolo $f(x)$ un significato probabilistico diverso).



Graficamente la probabilità che X assuma un particolare valore all'interno di un intervallo altri non è che l'area racchiusa al di sotto della densità di probabilità in quell'intervallo. Se la $f(x)$ è una funzione di distribuzione allora, considerando la **proprietà di chiusura**, si ha: $\int f(x) dx = 1$ qualora l'integrale venga calcolato su tutto l'insieme di

definizione della v.a. X . Infatti $\int f(x) dx = P(X = \text{un qualsiasi valore } x) = P(\text{evento certo}) = 1$.

La $f(x)$ contiene tutta l'informazione necessaria per fare previsioni ma conoscerla richiede una quantità infinita di misure. Tuttavia per moltissimi scopi pratici è sufficiente individuare solo alcuni riassunti (indici). Il primo è un indice di posizione che individua sull'asse reale il punto "intorno al quale è centrata" la distribuzione dei possibili valori della v.a.

Simbolicamente viene definito come **valore atteso** (o valore previsto) o media³

$m = E(X)$ con $E(X)$ definita da:

v.a. discreta: $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i)$ v.a. continua $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Si noti l'analogia meccanica col baricentro di un sistema di masse $P(x_i)$ nelle posizioni x_i .

❖ **Esercizio:** verificare che il valor medio del risultato del lancio di un dado è 3,5

³ NON è la media aritmetica: la media è definita in campo probabilistico, la media aritmetica in quello statistico

❖ **Esercizio:** dimostrare che $E(aX+b) = a E(X) + b$

Un secondo indice (di dispersione) quantifica la variabilità della v.a. intorno alla media. Si definisce **varianza** la quantità

$$\text{Var}(X) = E[(X-m)^2]$$

v.a. discreta: $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 P(x_i)$ v.a. continua $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx$

Dato che la varianza ha le dimensioni fisiche della grandezza X^2 si introduce ai fini pratici la grandezza $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ detta scarto quadratico medio o **deviazione standard** che è omogenea alla grandezza X .

❖ **Esercizio:** dimostrare che $E[(X-m)^2] = E(X^2) - E^2(X)$

❖ **Esercizio:** verificare che la deviazione standard della distribuzione dei risultati del lancio di un dado vale $\sigma(X) = \sqrt{35/12}$

❖ **Esercizio:** dimostrare che $\sigma(aX+b) = a \sigma(X)$

Data una qualsiasi distribuzione è possibile calcolare la probabilità che la v.a. sia compresa nell'intervallo (detto **intervallo di confidenza**) $m - \sigma < X < m + \sigma$. Molte delle distribuzioni di uso comune hanno la caratteristica che all'interno di questo intervallo la probabilità (**livello di confidenza**) è molto elevato. Ovviamente allargando l'intervallo di confidenza aumenta il livello di confidenza. Spesso si utilizza l'intervallo $m - 2\sigma < X < m + 2\sigma$.

❖ **esercizio:** verificare che nell'intervallo $m - \sigma < X < m + \sigma$ il livello di confidenza per il lancio di un dado è 2/3 (in altri termini: la probabilità che il valore della v.a. sia compreso fra 1,79 e 5,21 è del 66,7%).

La probabilità che una v.a. assuma un particolare valore, il suo valore atteso e la varianza sono grandezze probabilistiche che richiedono per il loro calcolo la conoscenza completa della distribuzione di probabilità.

Tuttavia, a partire da un insieme di N osservazioni sperimentali del fenomeno è possibile calcolare delle grandezze statistiche che al tendere di N a infinito costituiscono delle stime dei riassunti della distribuzione.

Abbiamo già detto della frequenza relativa e della probabilità p . Analogamente la media può essere stimata attraverso la media aritmetica $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$ e la deviazione standard attraverso la

deviazione standard sperimentale $\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N-1}}$.

PROBABILITA'	<-->	STATISTICA
p	\approx	k/N
$m = E(X)$	\approx	$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$
$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	\approx	$\sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N-1}}$

Distribuzione di Poisson

Supponiamo l'esistenza di un numero N di eventi **indipendenti**, ognuno con probabilità p di verificarsi e probabilità $q = 1 - p$ di non verificarsi. E' possibile definire una v.a. K che conta il numero di eventi che si verificano. Posto $m = Np$ numero atteso di successi, nel limite in cui N tende a infinito e p a zero (**eventi rari**), si ottiene la distribuzione di Poisson:

$$P_m(k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!} \text{ in cui } 0 \leq k < \infty$$

E' possibile dimostrare che:

$$E(K) = m$$

$$\text{Var}(K) = m.$$

A prima vista il fatto che nella poissoniana risulti $\sigma^2 = m$ potrebbe far pensare ad un errore di calcolo dimensionale; in realtà la v.a. della distribuzione di Poisson è un numero puro !

❖ **Esercizio:** verificare che la distribuzione di Poisson gode della proprietà di chiusura

❖ **Riflessione:** perché possono essere considerati eventi rari i circa 200 raggi cosmici che ogni secondo colpiscono un individuo?

Questa distribuzione è stata utilizzata per la prima volta nella conta dei globuli rossi: del numero enorme contenuto nel volume di 1 cm^3 di un prelievo standard solo una frazione irrisoria viene posta su un vetrino da microscopio con una camera di volume noto. L'esito k del conteggio, limitato in questo modo a poche centinaia di globuli rossi, è quindi soggetto a fluttuazioni statistiche: con elevata probabilità, però, il numero m cercato è compreso nell'intervallo $k - \sqrt{k} < m < k + \sqrt{k} \rightarrow m = k \pm \sqrt{k}$

Come esempio analizziamo la distribuzione per $m = 2,5$

$$k = 0 \rightarrow P_{2,5}(0) = \frac{e^{-2,5} 2,5^0}{0!} = 8,2 \%$$

$$k = 1 \rightarrow P_{2,5}(1) = \frac{e^{-2,5} 2,5^1}{1!} = 20,5 \%$$

$$k = 2 \rightarrow P_{2,5}(2) = \frac{e^{-2,5} 2,5^2}{2!} = 25,7 \%$$

$$k = 3 \rightarrow P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5} 2,5^3}{3!} = 21,4 \%$$

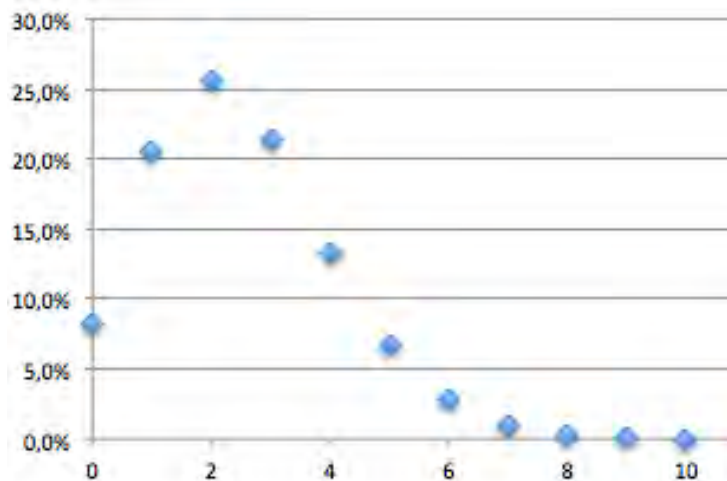
$$k = 4 \rightarrow P_{2,5}(4) = \frac{e^{-2,5} 2,5^4}{4!} = 13,4 \%$$

$$k = 5 \rightarrow P_{2,5}(5) = \frac{e^{-2,5} 2,5^5}{5!} = 6,7 \%$$

$$k = 6 \rightarrow P_{2,5}(6) = \frac{e^{-2,5} 2,5^6}{6!} = 2,3 \%$$

$$k = 7 \rightarrow P_{2,5}(7) = \frac{e^{-2,5} 2,5^7}{7!} = 1,0 \%$$

$$k = 8 \rightarrow P_{2,5}(8) = \frac{e^{-2,5} 2,5^8}{8!} = 0,3 \%$$



Calcoliamo la probabilità che $m - \sigma < k < m + \sigma$, cioè $2,5 - 1,58 < k < 2,5 + 1,58 \rightarrow 0,92 < k < 4,08$. Questa condizione è soddisfatta per i valori $k = 1, 2, 3, 4$ che corrisponde a un livello di confidenza del $20,5 + 25,7 + 21,4 + 13,4 = 81,0 \%$.

❖ **esempio:** 5000 cellule vengono irradiate. Sapendo che la loro probabilità di sopravvivenza è 0,05% qual è la probabilità di trovarne vive esattamente 3? E almeno 3?

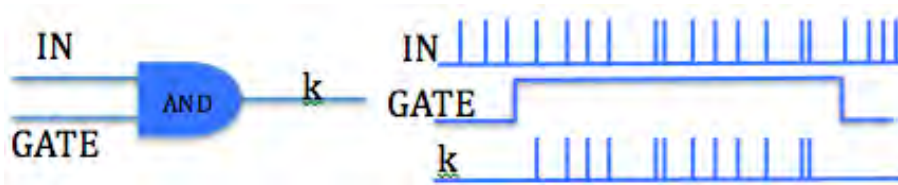
Il valore medio è dato da $Np = 5000 * 0,0005 = 2,5$. $P_{2,5}(3) = \frac{e^{-2,5} 2,5^3}{3!} = 21,4 \%$. La probabilità che siano almeno 3 si ottiene sommando tutte le probabilità da $k = 3$ fino a infinito... Più

brevemente, utilizzando la proprietà di chiusura, si può scrivere $P(0)+P(1)+P(2)+P(3\leq k) = 1$ e quindi $P(3\leq k) = 1 - (8,2+20,5+25,7)\% = 1 - 54,4\% = 45,6\%$

❖ Esempio: un particolare tipo di apparecchiatura è noto per avere un tasso di guasti di uno ogni 2 anni. Qual è la probabilità che in un anno non abbia guasti? E di averne uno o più di uno?

$$m = 1/2 = 0,5 \rightarrow P_{0,5}(0) = \frac{e^{-0,5}0,5^0}{0!} = 60,7\%; P_{0,5}(1\leq k) = 1 - P_{0,5}(0) = 39,3\%$$

Durante un'esperienza di laboratorio studieremo il numero di eventi di radioattività ambientale che casualmente vengono rivelati da un contatore a scintillazione. Semplificandolo al massimo, il sistema di acquisizione dei dati ha una sezione che lascia passare al dispositivo digitale di conteggio solo gli eventi che si presentano temporalmente in coincidenza con il segnale di GATE aperto:



Supponiamo di avere una frequenza (rateo o, all'inglese *rate*) di $m = 2,5$ eventi al secondo. Che distribuzione del numero di conteggi ci aspettiamo se la durata del GATE è 1 s? Ovviamente $m = 2,5/s \times 1s = 2,5$. Se gli eventi sono indipendenti ci aspettiamo la distribuzione di Poisson con $m = 2,5$ già graficata.

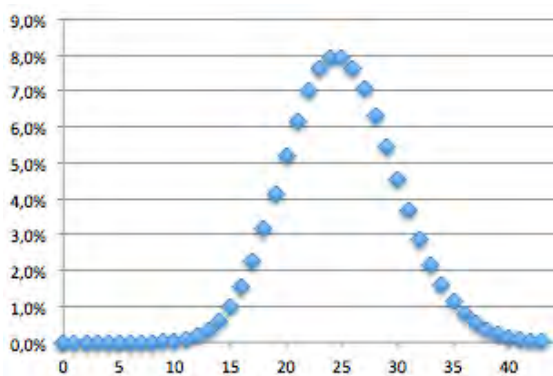
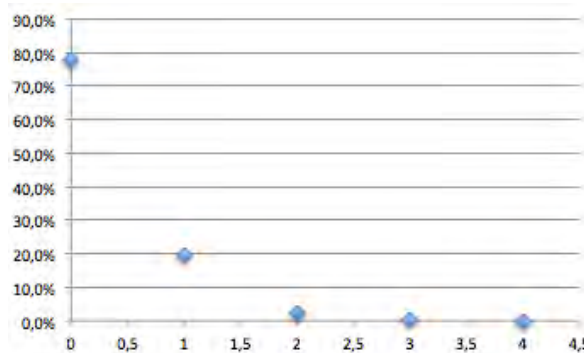
E se, invece, il GATE durasse 0,1 s? Allora avremmo $m = 0,25$.

$$k = 0 \rightarrow P_{0,25}(0) = \frac{e^{-0,25}0,25^0}{0!} = 77,9\%$$

$$k = 1 \rightarrow P_{0,25}(1) = \frac{e^{-0,25}0,25^1}{1!} = 19,5\%$$

$$k = 2 \rightarrow P_{0,25}(2) = \frac{e^{-0,25}0,25^2}{2!} = 2,4\%$$

$$k = 3 \rightarrow P_{0,25}(3) = \frac{e^{-0,25}0,25^3}{3!} = 0,2\%$$

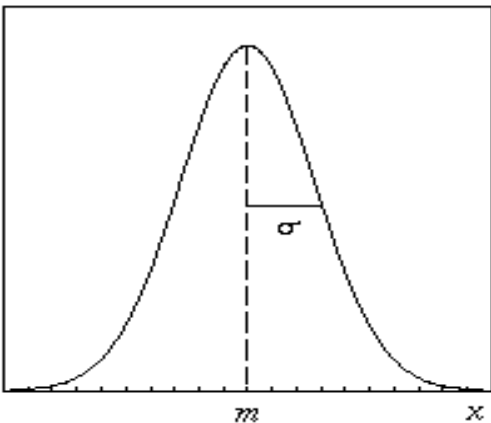


Se infine la durata del gate fosse di 10 secondi allora si avrebbe $m = 2,5/s \times 10 s = 25$ e la distribuzione assumerebbe una forma simmetrica "a campana".

Questa è una caratteristica comune a tutte le distribuzioni di probabilità: nel limite in cui il loro valore medio è molto elevato (tende a infinito) approssimano sempre più una particolare distribuzione (teorema del limite centrale): la distribuzione di Gauss.

Distribuzione di Gauss

Dato un valore $x = m$, se k eventi indipendenti ne aumentano, ognuno con probabilità $p = 1/2$, il valore di una quantità Δ e $N-k$ eventi ne diminuiscono, ognuno con probabilità $q = 1 - p = 1/2$ il valore della stessa quantità Δ , posto $\sigma^2 = Np(1-p) \Delta$, allora $X = m + k \Delta - (N-k) \Delta$. Nel limite di N che tende all'infinito mentre Δ va a zero, X diventa una v.a. continua con la distribuzione:



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Applicando le definizioni si può verificare che la funzione gode della proprietà di chiusura e che, come prevedibile, $E(X) = m$ e $Var(X) = \sigma^2$.

I flessi della funzione sono per i valori di $x = m \pm \sigma$.

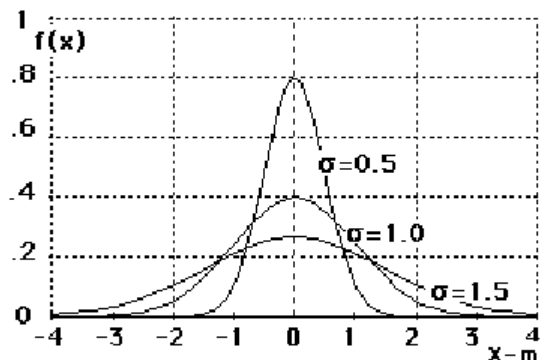
$$P(m - \sigma < x < m + \sigma) = 68,3\%$$

$$P(m - 2\sigma < x < m + 2\sigma) = 95,4\%$$

$$P(m - 3\sigma < x < m + 3\sigma) = 99,7\%$$

Dall'espressione del massimo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ (detto modulo di precisione) si deduce immediatamente che tanto più aumenta σ tanto più la curva si abbassa (mantenendo l'integrale unitario).

La precisione di un sistema di misura è la capacità di fornire la stessa risposta a parità di sollecitazione. Gli errori casuali alterano la risposta rendendo imprecisa la misura. La distribuzione degli errori segue la distribuzione di Gauss ed è quindi utilizzabile per stimare la risoluzione di uno strumento. La utilizzeremo per caratterizzare la risoluzione nella misura di energia effettuata con un contatore a scintillazione.



❖ **Esercizio:** verificare che la larghezza della funzione, calcolata a mezza altezza (Full Width at Half Maximum), è pari a $FWHM = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma = 2,35 \sigma$

❖ **Esercizio:** verificare che la probabilità che una misura distribuita gaussianamente sia più grande del valor medio di una quantità 2σ è pari al 2,3%

Distribuzione esponenziale

Ipotizziamo un processo poissoniano per il quale ci si attende una frequenza di r conteggi nell'unità di tempo⁴ (e quindi in media $m = r t$ eventi nell'intervallo $0 \div t$) e chiediamoci quale sia la distribuzione del tempo t che intercorre fra un evento e il successivo.

L'istante t^* in cui si verifica l'evento è una v.a. continua e quindi ne va definita la probabilità infinitesima: $dP(t < t^* < t + dt)$.

Questa probabilità è fattorizzabile col prodotto della probabilità che non avvengano eventi nell'intervallo finito $0 \div t$ moltiplicata per la probabilità (infinitesima) che avvenga un evento nell'intervallo $t \div t + dt$:

$$dP(t < t^* < t + dt) = P_{rt}(0) dP_{rdt}(1) = e^{-rt} dP_{rdt}(1) = e^{-rt} \left[\frac{e^{-rdt} (rdt)^1}{1!} \right] = e^{-rt} [e^{-rdt} r dt].$$

Sviluppando in serie di potenze l'esponenziale e fermandosi al primo termine in rdt (cioè $e^{-rdt} \sim 1$) si ottiene: $dP(t < t^* < t + dt) = f(t) dt = e^{-rt} r dt$.

Da $f(t) dt = r e^{-rt} dt$ si ottiene che la **distribuzione dei tempi d'arrivo** è **esponenziale**:

$$f(t) = r e^{-rt} \text{ con } 0 \leq t < \infty \text{ dalla quale si può dedurre:}$$

$$E(t) = 1/r$$

$$\text{Var}(t) = 1/r^2$$

L'inverso della frequenza r è un tempo $\tau = 1/r$ caratteristico dell'andamento esponenziale: $E(t) = 1/r = \tau$ è il tempo che in media trascorre fra il verificarsi di un evento e il successivo (nel caso del decadimento di nuclei radioattivi τ è detto vita media)

La distribuzione $f(t) = r e^{-rt}$ può quindi essere riscritta come $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

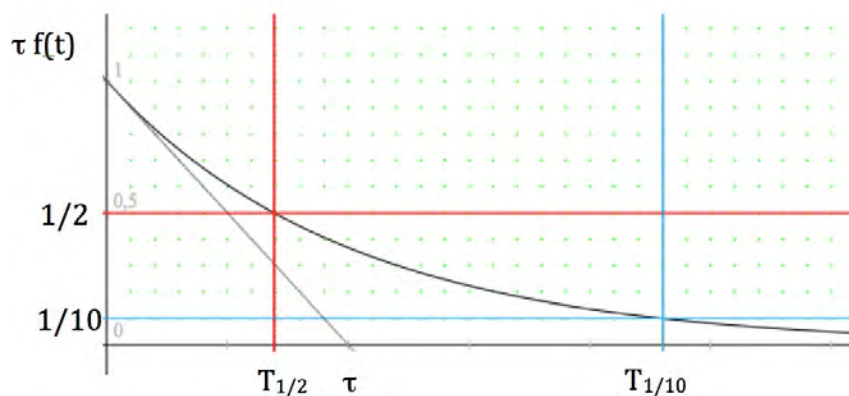
❖ **Esercizio:** verificare la proprietà di chiusura della funzione esponenziale

❖ **Esercizio:** verificare che per la distribuzione esponenziale $E(t) = \tau$.

❖ **Esempio:** determiniamo per la distribuzione esponenziale il tempo $T_{1/2}$ entro il quale l'evento ha una probabilità del 50% di verificarsi.

Si tratta di integrare $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ fra 0 e $T_{1/2}$ e porre il risultato pari a 0,5:

$$\int_0^{T_{1/2}} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \tau e^{-T_{1/2}/\tau} = 0,5 \rightarrow T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,69 \tau.$$



❖ **Esercizio:** analogamente al tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ si può determinare l'istante $T_{1/10}$ prima del quale c'è una probabilità del 90% del verificarsi dell'evento (e quindi una probabilità 1/10 che ancora non si sia verificato). Verificare che ora il calcolo svolto precedentemente porta a $0,1 = e^{-T_{1/10}/\tau}$ e quindi che il tempo $T_{1/10} = \tau \ln 10 = 2,30 \tau$.

⁴ r (rateo di conteggi o "rate" in inglese) è un frequenza temporale: si misura in hertz

❖ Esercizio: dopo quante costanti di tempo τ si ha una probabilità del 25% = 1/4 che l'evento non si sia ancora verificato?

❖ Esercizio: dopo quante costanti di tempo τ si ha una probabilità del 5% = 1/20 che l'evento non si sia ancora verificato?

Test del chi quadro applicato ai conteggi

Un'altra distribuzione di probabilità interessante è quella della somma dei quadrati di ν variabili aleatorie indipendenti ognuna con media nulla e varianza unitaria: la distribuzione del χ^2 (chi quadro) con ν gradi di libertà:

$$\chi^2 = \sum_{i=1,\nu} u_i^2 \text{ dove } E(u_i) = 0 \text{ e } \text{Var}(u_i) = 1$$

I riassunti di questa distribuzione sono:

$$E(\chi^2) = \nu$$

$$\text{Var}(\chi^2) = 2\nu$$

e, al solito, per ν sufficientemente grande la distribuzione è approssimabile con una gaussiana.

L'interesse di questa distribuzione consiste nel fatto che in una serie di misure della stessa grandezza è possibile costruire la quantità χ^2 e, se questa si discosta troppo dal suo valore atteso, significa che le ipotesi $E(u_i) = 0$ e $\text{Var}(u_i) = 1$ non sono verificate (test del χ^2).

Vediamo come applicare il test del χ^2 al caso di una serie di misure x_i che dovrebbero seguire la distribuzione di Poisson. Se definiamo $u_i = \frac{x_i - m}{\sigma}$ otteniamo:

$$E(u_i) = E\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right) = \frac{x_i - m}{\sigma} = \frac{E(x_i) - E(m)}{\sigma} = \frac{m - m}{\sigma} = 0$$

$$\text{Var}(u_i) = \text{Var}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right) = \frac{\text{Var}(x_i) + \text{Var}(m)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 + 0}{\sigma^2} = 1$$

$$\text{Da cui } \chi^2 = \sum_{i=1,N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1,N} (x_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

Nel caso di una poissoniana si possono stimare sia m che σ^2 con \bar{X} per cui:

$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1,N} (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$ in cui ν , che conta le variabili indipendenti, vale $N-1$ (la media aritmetica costituisce un vincolo fra le N misure di X).

Assumeremo quindi che la v.a. X segue la statistica di Poisson se, eseguite N misure indipendenti, la quantità $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1,N} (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$ è all'interno dell'intervallo $(N-1) \pm 2\sqrt{2(N-1)}$.

Il fattore due davanti alla deviazione standard è per allargare il livello di confidenza: si è sicuri al 95% che se si ottiene un valore al di fuori dell'intervallo scelto i dati non seguono la statistica di Poisson.

❖ Esercizio: in una serie di 100 misure di conteggi si ottengono:

conteggi	0	1	2	3	4	5
# di misure	61	26	10	2	1	0

I conteggi sono distribuiti poissonianamente?

$$\bar{X} = \frac{61 \times 0 + 26 \times 1 + 10 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4}{61 + 26 + 10 + 2 + 1} = 0,56 \text{ (numero medio di conteggi)}$$

$$\chi^2 = \frac{61 \times (0 - 0,56)^2 + 26 \times (1 - 0,56)^2 + 10 \times (2 - 0,56)^2 + 2 \times (3 - 0,56)^2 + 1 \times (4 - 0,56)^2}{0,56} = 122,6$$

questo valore è all'interno dell'intervallo $99 \pm 2\sqrt{2 \times 99} = 99 \pm 28 \rightarrow$ poissoniana

Il caso di più variabili aleatorie

Prese due variabili aleatorie X e Y, ognuna la propria distribuzione di probabilità f(x) e f(y), e quindi valori medi E(X) e E(Y) e varianze Var(X) e Var(Y), è utile esaminarne la combinazione lineare $Z = a X + b Y$.

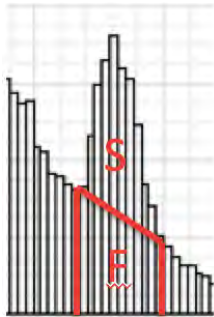
Basandosi sulla linearità dell'operatore E() si ha che $E(Z) = a E(X) + b E(Y)$.

Inoltre, se X e Y sono statisticamente indipendenti, allora la distribuzione di probabilità f(x,y) che si verificano contemporaneamente X e Y è data da $f(x,y) = f(x) f(y)$ da cui si ricava che

$$Var(Z) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \rightarrow \sigma(a X + b Y) = \sqrt{[a \sigma(X)]^2 + [b \sigma(Y)]^2}$$

Nel caso in cui $Z = X \pm Y$ (cioè $a = 1$ e $b = \pm 1$) si ottiene $\sigma(X \pm Y) = \sqrt{[\sigma(X)]^2 + [\sigma(Y)]^2}$.

Quest'ultima relazione è particolarmente utile nel caso degli N conteggi dovuti alla somma di due contributi originati, per esempio, uno da eventi di radioattività e uno dal rumore di fondo elettronico del dispositivo di rivelazione.



In questi casi si possono eseguire due misure: il numero di conteggi F di fondo del solo rivelatore ottenuto allontanandosi dalla sorgente radioattiva e il numero totale di conteggi dato dalla radioattività (segnale S incognito da quantificare) e dal fondo: $N = S + F$.

Banalmente $S = N - F$ ⁵.

Ma con quale incertezza è noto S? $\sigma(S) = \sigma(N-F) = \sqrt{[\sigma(N)]^2 + [\sigma(F)]^2}$ e, dato che sia N che F sono conteggi che seguono la statistica poissoniana, si ha $\sigma(N)=\sqrt{N}$ e $\sigma(F)=\sqrt{F}$ e quindi $\sigma(S) = \sigma(N-F) = \sqrt{N + F}$

Caratteristiche della media aritmetica

Consideriamo la media aritmetica di N misure $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \sum \frac{1}{N} x_i$.

Questa espressione può essere vista come la combinazione lineare con coefficienti 1/N di N variabili aleatorie: l'indice i = 1, N in questo caso indicherebbe non la prima, seconda, terza misura... della v.a. X ma un valore assunto dalla v.a. X₁ (prima misura), un valore assunto dalla v.a. X₂ (seconda misura), un valore assunto dalla v.a. X₃ (terza misura)...

E' spesso ragionevole supporre che la distribuzione di probabilità della prima misura f(x₁) sia la stessa della seconda misura e così per tutte le altre⁶: $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_N) = f(x)$ tutte con $E(X_i) = m$ e $Var(X_i) = \sigma^2$.

Pertanto $E(\bar{X}) = \frac{1}{N}E(X_1) + \frac{1}{N}E(X_2) + \dots = N \frac{1}{N} E(X) = m$ cioè il valore atteso della media aritmetica è la media e $Var(\bar{X}) = \frac{1}{N^2} Var(X_1) + \frac{1}{N^2} Var(X_2) + \dots = N \frac{1}{N^2} Var(X) = \frac{1}{N} Var(X)$ da cui si ricava che

la deviazione standard della media aritmetica di N misure indipendenti è

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(X)$$

Infine, sempre per via del teorema del limite centrale, la distribuzione di probabilità della media aritmetica di N misure f(\bar{X}) tende, nel limite $N \rightarrow \infty$, alla distribuzione di Gauss, a prescindere dalla distribuzione di probabilità f(x).

⁵ si sta ipotizzando che le misure di N e F abbiano avuto la stessa durata temporale e che le frequenze del segnale e del fondo non siano variate durante le misure

⁶ cioè che i risultati delle misure siano tra loro statisticamente indipendenti

❖ Esercizio: calcolare per quanto tempo occorre acquisire eventi con frequenza di circa 10 Hz affinché tale frequenza sia nota al 5% (40 s)

❖ Esercizio: ... e se la strumentazione avesse una frequenza di segnali di fondo pari a 7,5 Hz misurata per una pari durata temporale? (100 s)

RIASSUMENDO: il risultato di una serie di N misure della stessa grandezza X è rappresentato dalla media della distribuzione di probabilità di X: gli errori di misura alterano casualmente il valore m ora in eccesso, ora in difetto, all'incirca come avviene per la distribuzione di Gauss. Dal punto di vista statistico quindi si stima:

- m con la media aritmetica

$$- \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad \text{con} \quad \sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

La media aritmetica compensa parzialmente le fluttuazioni in eccesso rispetto a m con quelle in difetto e quindi la sua precisione migliora. Si conviene quindi di riportare come risultato la media aritmetica e la sua incertezza $\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(X)$ che, statisticamente, diventa $\frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_s(X)$.

Il teorema del limite centrale, infine, per N sufficientemente grande garantisce che la distribuzione della media aritmetica è gaussiana e che quindi con elevata probabilità (circa 68% di livello di confidenza)

$$m - \sigma(\bar{X}) < \bar{X} < m + \sigma(\bar{X}) \rightarrow \bar{X} - \sigma(\bar{X}) < m < \bar{X} + \sigma(\bar{X})$$

che, statisticamente, diventa: $\bar{X} - \sigma_s(\bar{X}) < m < \bar{X} + \sigma_s(\bar{X})$.

Al crescere di N si ha che $\sigma_s(\bar{X})$ diminuisce (N al denominatore), quindi l'intervallo si stringe e la media aritmetica diventa una stima sempre più buona di m:

$$m \approx \bar{X} \pm \sigma_s(\bar{X}) = \bar{X} \pm \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}} = \bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

❖ Esercizio: in una serie di 9 misure della stessa grandezza X si ottengono i seguenti risultati:

8,5 (2 volte)

9,0

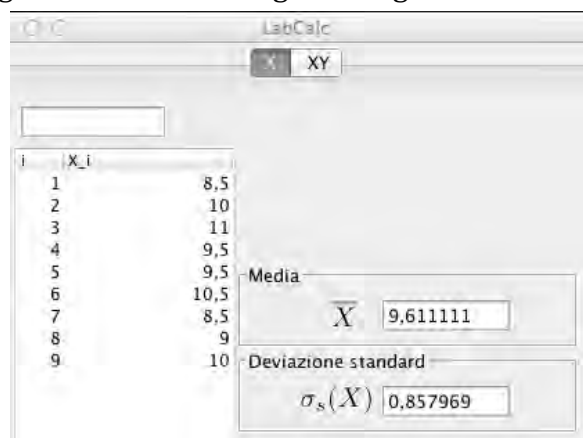
9,5 (2 volte)

10,0 (2 volte)

10,5

Con una qualsiasi calcolatrice statistica si ottengono rapidamente la media aritmetica della serie di misure (9,611) e la deviazione standard (0,858).

Perché la migliore stima del valore vero della grandezza misurata è $X = 9,61 \pm 0,29$?



❖ Con un intervallo di confidenza di 3 deviazioni standard, perché il valore minimo che ci si può aspettare per una decima misura è 7,0?

Retta dei minimi quadrati

Spesso è necessario studiare la relazione fra due diverse grandezze fisiche, per esempio per tarare uno strumento o per studiare la risposta di un sistema ad uno stimolo variabile. Nel caso di una relazione lineare si può procedere anche manualmente realizzando un grafico con la risposta Y in ordinata e la sollecitazione X in ascissa: un andamento lineare è facilmente individuabile.

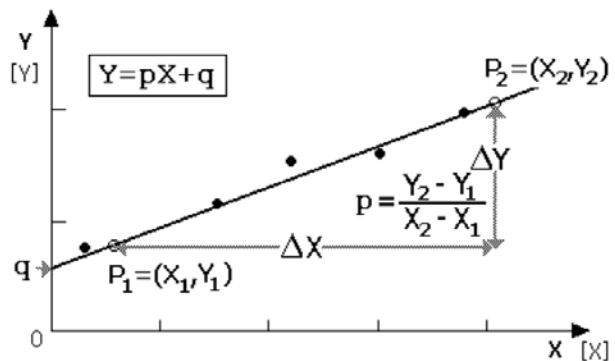
Ogni punto sul grafico è il risultato di una coppia di misure (x_i, y_i) entrambe affette da errori di misura: solo teoricamente si disporrebbero lungo una retta. In realtà, a seconda della precisione delle misure, i punti saranno più o meno ben allineati; in alcuni casi potrebbe essere addirittura problematico tracciare con un righello una retta che passi quanto più possibile nelle vicinanze di quanti più punti possibile.

Tuttavia anche una retta tracciata grossolanamente fornirebbe molte informazioni. La prima è che se si è riusciti a tracciarla l'andamento è lineare!

A questo punto diventa lecito ritenere che l'andamento teorico è descritto da $Y = p X + q$ dove la pendenza p e l'intercetta q della retta approssimante diventano più significativi dei singoli punti misurati.

Per ricavare q basta considerare che è la distanza dall'origine dell'intersezione della retta con l'asse delle Y : $q = Y(X=0)$; è sufficiente leggere sul grafico il valore con la sua unità di misura.

Per ricavare la pendenza e le sue unità di misura si scelgono arbitrariamente sulla retta due punti $P_1=(X_1, Y_1)$ e $P_2=(X_2, Y_2)$. Da $Y_1 = p X_1 + q$ e $Y_2 = p X_2 + q$ si ricava $p = (Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)$.



Per una elaborazione meno approssimata si può ricorrere al metodo dei minimi quadrati che minimizza, al variare dei parametri p e q , i quadrati delle distanze dei singoli punti dalla retta $Y = p X + q$. L'elaborazione statistica di questa minimizzazione fornisce sia una stima di p e q :

$$p = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \quad q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

che le loro varianze:

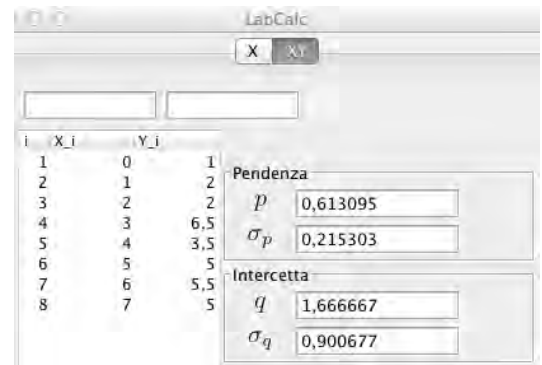
$$\sigma^2(p) = \frac{N \sigma^2}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \quad \sigma^2(q) = \frac{\sum x_i^2 \sigma^2}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \quad \text{con } \sigma^2 = \frac{\sum [y_i - (p x_i + q)]^2}{N - 2}$$

Queste formule sono integrate nella calcolatrice statistica LabCalc sviluppata per le attività del Laboratorio Didattico di Fisica della Sapienza; può essere scaricata dal sito <http://w3.uniroma1.it/labfis/download.html>

Come si vede le incertezze delle stime di p e q sono legate alla quantità $\sigma^2 = \frac{\sum [y_i - (p x_i + q)]^2}{N - 2}$ che rappresenta sostanzialmente la distanza quadratica media delle coppie di misure (x_i, y_i) dalla retta: quanto più i punti sono ben allineati tanto più piccole sono le incertezze con cui si possono ricavare i parametri p e q .

❖ **Esercizio:** i risultati di una serie di 8 misure della sollecitazione X e della risposta Y vengono inseriti in una calcolatrice statistica per determinare se sia più precisa la stima della pendenza o dell'intercetta della retta che descrive la dipendenza di Y da X.

Viene prodotto un grafico dei punti misurati e se ne verifica la linearità. Risulta evidente che un punto è affetto da errori di misura eccessivi e quindi viene scartato. Rielaborando i dati dei punti rimasti si ottiene $\sigma(p)/p = 0,08/0,65 = 12\% < \sigma(q)/q = 0,35/1,09 = 32\%$



❖ **Riflessione:** spero, al termine di questa necessariamente rapida, superficiale e incompleta carrellata sul significato di aleatorietà della natura, che abbiate migliorato la conoscenza della relazione causa-effetto. Spesso la sua natura è contaminata da ragionamenti di fondo in cui l'osservazione statistica viene inconsciamente alterata dall'osservatore: contate quante volte non succede nulla passando sotto una scala, quando un gatto nero vi attraversa la strada, quando uno specchio si rompe e, soprattutto, quanti esami superate anche se avete correttamente stampato la ricevuta dell'esame prima di presentarvi all'orale...

LABORATORIO⁷: ESPERIENZA SUI CONTEGGI

A) STUDIO DEL NUMERO MEDIO DI CONTEGGI IN FUNZIONE DELLA DURATA DEL GATE

B) STUDIO DELLA RELAZIONE FRA MEDIA E DEVIAZIONE STANDARD DEL NUMERO DI CONTEGGI

C) CONFRONTO FRA DISTRIBUZIONE STATISTICA E PREVISIONE PROBABILISTICA NEL CASO DI EVENTI POISSONIANI CON NUMERO MEDIO DI CONTEGGI PARI A CIRCA 0,8 - 3 - 25

PRIMA SERIE DI RACCOLTA DATI

Con la durata del GATE impostata a 1000 ms acquisire 200 GATE. Ripetere la sequenza per: 500 ms, 200 ms, 100 ms, 50 ms, 20 ms, 10 ms, 5 ms, 2 ms, 1 ms

Durante ogni acquisizione verificare che l'andamento dei conteggi segua qualitativamente l'andamento previsto dalla statistica di Poisson: in caso di problemi potrebbe comparire un numero anomalo di conteggi nel canale zero dell'istogramma o un numero anomalo di overflow (valori maggiori del canale massimo visualizzato nell'istogramma) o l'istogramma potrebbe presentare più picchi... se dovesse succedere informare il docente.

Alla fine di ogni acquisizione salvare gli istogrammi dei conteggi, riportare sul quaderno l'ora e le statistiche dell'istogramma: numero di eventi, media (con almeno 3 cifre significative), deviazione standard, valore minimo e massimo dell'istogramma e numero di canali.

⁷ maggiori dettagli verranno forniti in concomitanza con l'esercitazione in laboratorio

Riportare su carta doppio logaritmica il numero medio di conteggi (fra 0,1 e 100) in funzione della durata del GATE (fra 1 ms e 1 s); tracciare la retta che meglio passa per i punti sperimentali e ricavarne la pendenza. Inserire i logaritmi dei valori ottenuti nella calcolatrice per ottenere i parametri della retta col metodo dei minimi quadrati.

Preso un valore sulla retta graficata dedurre la frequenza dei segnali prodotti dal contatore a scintillazione

SECONDA SERIE DI RACCOLTA DATI

Impostare un'acquisizione di 500 GATE della durata necessaria per ottenere un valore medio di circa 0,8 conteggi; acquisirli; salvare i dati, riportare sul quaderno l'ora e le statistiche dell'istogramma: numero di eventi, media (con almeno 3 cifre significative) e deviazione standard. Ripetere la stessa operazione per i valori medi 3 e 25 (ovviamente 0,8 3 e 25 sono solo valori nominali; le medie effettive saranno note solo a fine acquisizione)

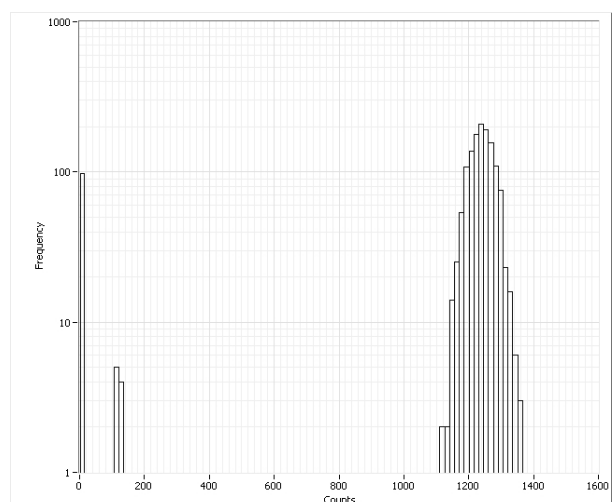
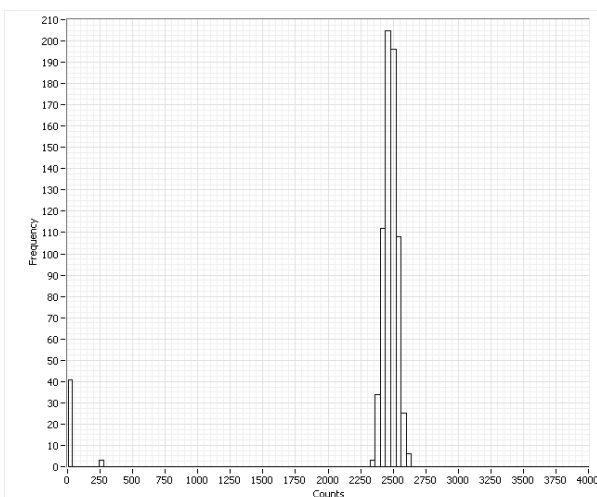
Graficare su carta doppio logaritmica la deviazione standard del numero di conteggi in funzione del numero medio di conteggi; tracciare la retta che meglio passa per i punti sperimentali. Ricavare con i minimi quadrati la pendenza della retta e confrontarla con quanto atteso

Copiare su un grafico in carta lineare gli istogrammi delle acquisizioni già effettuata con valori medio circa 0,8 e 3 e sovrapporvi le distribuzioni attese in base alle poissoniane aventi come valori m le rispettive medie aritmetiche calcolate da GIADA nei 500 GATE.

Analogamente per l'acquisizione già effettuata con valor medio circa 25 ma sovrapponendo una distribuzione gaussiana avente come valore m la media aritmetica calcolata da GIADA nei 500 GATE e parametro σ^2 pari a m .

Commentare l'entità dell'accordo fra le 3 distribuzioni statistiche e quelle previste su base probabilistica: qualitativamente dal confronto dei grafici; quantitativamente verificando la poissonianità dei dati col test del χ^2 .

Esempio della distribuzione del numero di conteggi (grafici ottenuti con l'acquisizione di 700 GATES lunghi 1 s a sinistra (scala verticale lineare) e di 1000 GATES lunghi 1 s a destra (scala verticale logaritmica)).



RADIOPROTEZIONE

Il fatto che le radiazioni non vengano percepite dall'uomo le rende potenzialmente pericolose così come lo sono l'elettricità, alcune sostanze chimiche, le emissioni elettromagnetiche: per sfruttarne le notevoli potenzialità occorre quindi regolamentare il loro uso al fine di massimizzarne gli effetti benefici mantenendo a un livello tollerabile quelli negativi, come avviene per tutte le tecnologie che interagiscono con l'uomo o l'ambiente.

La radioprotezione ha il compito di definire un insieme di leggi, norme e procedure tese alla protezione da effetti nocivi sui lavoratori, per quanto riguarda le esposizioni derivanti dall'attività lavorativa; sui pazienti, per quanto riguarda le esposizioni derivanti da esami diagnostici o terapie; sulla popolazione e sull'ambiente, per quanto riguarda i tipi di esposizioni che possono interessarle.

Nello strutturare il corso di laboratorio sono stati seguiti i **principi della Radioprotezione** che qui, come esempio della loro applicazione, vengono solo accennati con riferimento alle attività di laboratorio (per alcuni dettagli normativi e quantitativi riferirsi alle lezioni del Prof. Patera):

Principio di giustificazione

In ogni attività che contempla esposizione a radiazioni ionizzanti deve essere giustificato il loro uso. In particolare deve essere verificato che i benefici ottenibili dal loro impiego superano i danni che potrebbero derivarne.

Nel caso delle sorgenti impiegate in laboratorio non sono ragionevolmente prevedibili danni alla salute degli studenti mentre acquisire familiarità con le radiazioni toglie quel senso di paura ingiustificata richiamato dal termine "nucleare" che mal si addice alla professionalità dell'Ingegnere biomedico.

Principio di ottimizzazione

L'esposizione alle radiazioni ionizzanti deve essere ridotta quanto più possibile (**principio ALARA**, *As Low As Reasonably Achievable*).

Nel caso delle attività di laboratorio, oltre ad aver selezionato sorgenti con il più basso livello di radiazioni compatibile con le misure da svolgere, il loro impiego non inizia con la prima esperienza di laboratorio sfruttando il fatto che per la comprensione delle problematiche relative al conteggio in fenomeni poissoniani è possibile utilizzare il fondo naturale di radiazione. Vengono inoltre presi ulteriori accorgimenti per ridurre comunque il livello di esposizione alle radiazioni.

Applicazione dei limiti di dose

Una volta che l'uso delle radiazioni sia stato giustificato e ridotto al livello più basso possibile resta da verificare se quanto ottenuto rappresenta comunque una situazione di pericolo per l'individuo, il lavoratore e/o la popolazione.

Nel caso delle sorgenti utilizzate in laboratorio, come si vedrà successivamente, l'esposizione alla radiazione che possono indurre è talmente ridotta da farle rientrare nella categoria di "esenzione" per la quale non sono previste particolare norme per la tutela dell'individuo

APPARATO SPERIMENTALE

Le esperienze di laboratorio sono volte allo studio di grandezze dosimetriche utilizzano come generatore di radiazione una sorgente radioattiva emettitrice di positroni. In questo modo potranno essere anche effettuati dei paragoni con la PET che costituisce invece uno degli strumenti diagnostici più sofisticati a disposizione delle strutture ospedaliere.

L'emissione radioattiva verrà evidenziata da un opportuno rivelatore in grado di produrre informazioni che verranno sia analizzate in tempo reale, sia memorizzate per successive elaborazioni più sofisticate.

Quando una particella attraversa la materia interagisce con essa cedendole tutta o parte della sua energia secondo meccanismi che variano significativamente in base al tipo di particella incidente e alla sua energia. Per una trattazione completa delle modalità di **interazione della radiazione con la materia** si rimanda al modulo di teoria del Prof. Patera. Per la comprensione delle sole attività di laboratorio è sufficiente ricordare che le particelle cariche perdono energia per eccitazione e ionizzazione del mezzo in modo continuo (Bethe-Bloch). Le particelle neutre (fotoni, neutroni) non sono, invece, in grado di eccitare e ionizzare direttamente il materiale: lo fanno tramite la produzione di particelle secondarie cariche che a loro volta perdono energia per eccitazione e ionizzazione.

Nei rivelatori di particelle il riconoscimento del passaggio di una particella può avvenire con diverse modalità: alcuni rivelatori complessi sono in grado di visualizzare la mappa dei punti di emissione delle radiazioni (imaging), altri, più semplici (contatori), sono invece dedicati al conteggio del numero di particelle di una determinata tipologia e energia che in un predefinito intervallo di tempo attraversano il rivelatore.

Il rivelatore scelto per il laboratorio è il **contatore a scintillazione** che sfrutta la proprietà di alcuni materiali di emettere radiazione visibile ("scintillare") in seguito al rilascio di energia nel materiale. Da questo punto di vista il materiale scintillante si comporta come un sensore/trasduttore che percepisce la presenza di radiazione e trasforma in fotoni visibili parte dell'energia rilasciata dalla particella nello scintillatore.

La catena di misura prosegue con un tubo fotomoltiplicatore (Photo Multiplier Tube PMT) in grado, sfruttando l'effetto fotoelettrico (vedi Prof. Patera) di convertire la luce visibile in un segnale elettrico di misura (proporzionale, cioè, all'energia rilasciata nello scintillatore).

Analizziamo con qualche dettaglio i diversi elementi della catena di misura con lo scopo di fornire qualche indicazione di base utile per ottimizzare la scelta di un particolare dispositivo. La decisione di utilizzare questo rivelatore per le attività di laboratorio è derivata dal fatto che gran parte della strumentazione biomedica attualmente in uso utilizza scintillatori accoppiati a fotomoltiplicatori anche se le apparecchiature più recenti stanno iniziando a impiegare dispositivi allo stato solido (SiPM: silicon photomultiplier) in sostituzione dei PMT.

SCINTILLATORE

Lo scintillatore utilizzato è un cristallo inorganico di CsI (Tl): ioduro di cesio attivato con tallio. Il meccanismo di scintillazione nei materiali inorganici è dovuto alle transizioni fra gli stati energetici determinati dalle caratteristiche del reticolo cristallino. L'interazione

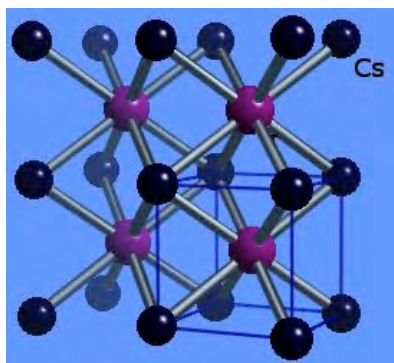
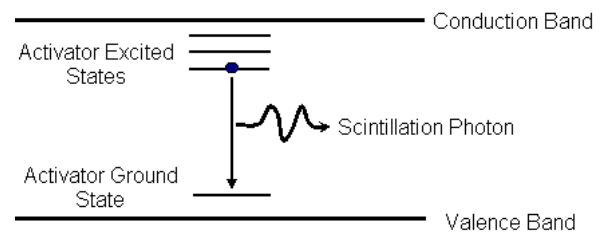
reciproca tra gli atomi del cristallo crea una struttura a livelli discreti raggruppati in bande permesse agli elettroni. La banda più bassa è quella di valenza, occupata dagli elettroni legati ai siti reticolari. Al contrario, i livelli della banda di conduzione sono occupati da elettroni che hanno un'energia abbastanza alta per migrare all'interno del cristallo. I livelli intermedi tra la banda di valenza e quella di conduzione non possono essere occupati, dando luogo così a una banda proibita. Nei materiali isolanti, come i cristalli scintillanti, a temperatura ambiente la banda di valenza è completamente riempita, al contrario di quella di conduzione, e il gap di energia che le separa è troppo alto per essere superato dagli elettroni termici.

Quando una data radiazione investe il cristallo parte dell'energia ceduta dalla radiazione incidente può eccitare alcuni elettroni, permettendo loro di superare il gap di energia (di pochi eV) e di salire in banda di conduzione, lasciando le corrispondenti lacune in banda di valenza; quando poi l'atomo si diseccita, gli elettroni tornano in banda di valenza emettendo un fotone.

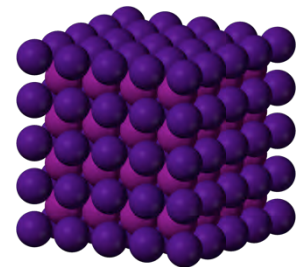
In generale nei cristalli scintillanti puri (scintillatori intrinseci - p.es. BGO) i processi di diseccitazione con emissione di fotoni hanno bassa probabilità.

L'**efficienza luminosa** è un parametro caratteristico dello scintillatore ed è il rapporto tra l'energia convertita in luce e l'energia rilasciata nel cristallo.

Per aumentare l'efficienza luminosa vengono aggiunte al cristallo piccole quantità (attorno al permille) di atomi attivatori (scintillatori estrinseci - p.es. NaI(Tl), CsI(Tl), LYSO(Ce)) che creano particolari siti nel reticolo modificando la struttura dei livelli atomici rispetto a un cristallo puro così da inserire nel gap di energia proibita una serie di livelli energetici intermedi (centri di luminescenza) che favoriscono l'intrappolamento delle coppie elettrone-lacuna e la successiva diseccitazione attraverso emissione radiativa. Poiché l'emissione tra gli stati intermedi avviene a una lunghezza d'onda superiore a quella di assorbimento del cristallo, quest'ultimo risulta trasparente alla radiazione che emette. Ad esempio la gap del CsI è 6,5 eV mentre l'emissione del CsI(Tl) è ... (calcolatela con i dati della pagina seguente)



Ad esempio lo ioduro di cesio ha una struttura cubica: ai vertici del cubo sono posti gli atomi di cesio e al centro del cubo quelli di iodio (ovviamente la situazione è simmetrica Cs <-> I). Il drogaggio col cerio va a sostituire alcuni atomi di iodio alterando la struttura periodica del cristallo e quindi alterando localmente (centri di luminescenza) i livelli energetici.



I tempi caratteristici delle diseccitazioni sono molto rapidi 10^{-9} - 10^{-6} s (fluorescenza); ma esistono altri processi di emissione di luce, competitivi con la fluorescenza, su scale di tempo maggiori che vanno sotto il nome di fosforescenza.

Di solito nei rivelatori interessa solo il contributo di fluorescenza e si cerca di minimizzare quello dovuto alla fosforescenza che essendo "lento" limita la possibilità di contare eventi che si succedono molto rapidamente.

Confrontiamo le caratteristiche di quattro diversi scintillatori inorganici con densità e numero Z medio elevati e quindi (chiedetevi perché?) particolarmente efficaci nella rivelazione di radiazione gamma nell'intervallo 0,1 - 1 MeV

- NaI(Tl) – ioduro di sodio attivato con tallio

E' uno scintillatore "storico" utilizzato come termine di riferimento per i nuovi scintillatori. Il costo è contenuto ma è altamente igroscopico. La densità non è particolarmente alta ($3,7\text{g/cm}^3$) e, per le applicazioni più recenti (TOF PET), è troppo lento (costante di tempo di 250 ns) ma ha una elevata efficienza luminosa (38 000 fotoni/MeV). Il massimo dell'emissione luminosa è a 415 nm.

- CsI(Tl) – ioduro di cesio attivato con tallio

Non è igroscopico e ha una elevata resistenza al danno da radiazione che rende inutilizzabili altri scintillatori. Ha una densità più elevata del NaI ($4,5\text{g/cm}^3$) e due costanti di tempo "lunghe": 600 ns e 3,4 μs . L'efficienza luminosa è molto elevata (50 000 fotoni/MeV) ma è piccata a 550 nm (troppo elevata per i tubi fotomoltiplicatori usati in alcune applicazioni)

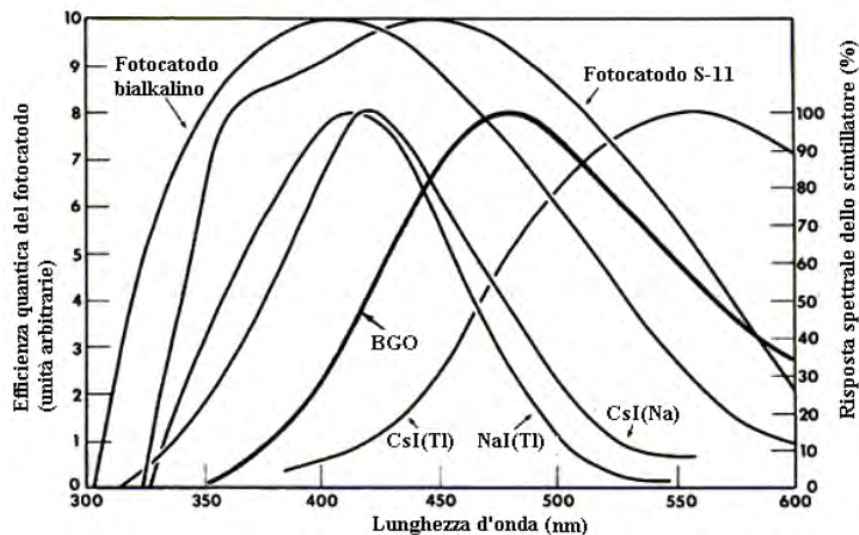
- BGO sigla di $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$ – germanato di bismuto

E' uno degli scintillatori più diffusi nelle attuali applicazioni medicali (SPECT, PET). Ha una densità elevata ($7,1\text{g/cm}^3$) ma una bassa efficienza luminosa (8 000 fotoni/MeV) a 480 ns con una costante di tempo di 300 ns

- LYSO (Ce) sigla di $\text{Lu}_{1,8}\text{Y}_{0,2}\text{SiO}_5$ - silicato di lutezio e ittrio attivato con cerio

E' uno scintillatore molto recente che presenta alta densità ($7,2\text{g/cm}^3$), elevata velocità di risposta (40 ns) e elevata efficienza luminosa (40 000 fotoni/MeV a 410 nm) ma è leggermente radioattivo a causa del decadimento del lutezio e quindi non può essere utilizzato per applicazioni con basse frequenze di conteggio.

L'emissione luminosa non è monocromatica ma ha uno spettro continuo che dipende dal materiale. Questi sono alcuni esempi di andamento dello spettro di emissione $f(\lambda)$ degli scintillatori inorganici considerati confrontati con le caratteristiche spettrali dei tubi fotomoltiplicatori che hanno il compito di trasformare i fotoni dello scintillatore in un segnale elettrico. Notare come il massimo dell'emissione luminosa (normalizzato al 100%) si sposta verso destra andando dal NaI(Tl) al BGO, al CsI(Tl). La curva indicata come fotocatodo bialcalino (normalizzata a 10) rappresenta l'efficienza (detta efficienza quantica) $s(\lambda)$ con la quale i fotomoltiplicatori più diffusi riescono a convertire la luce



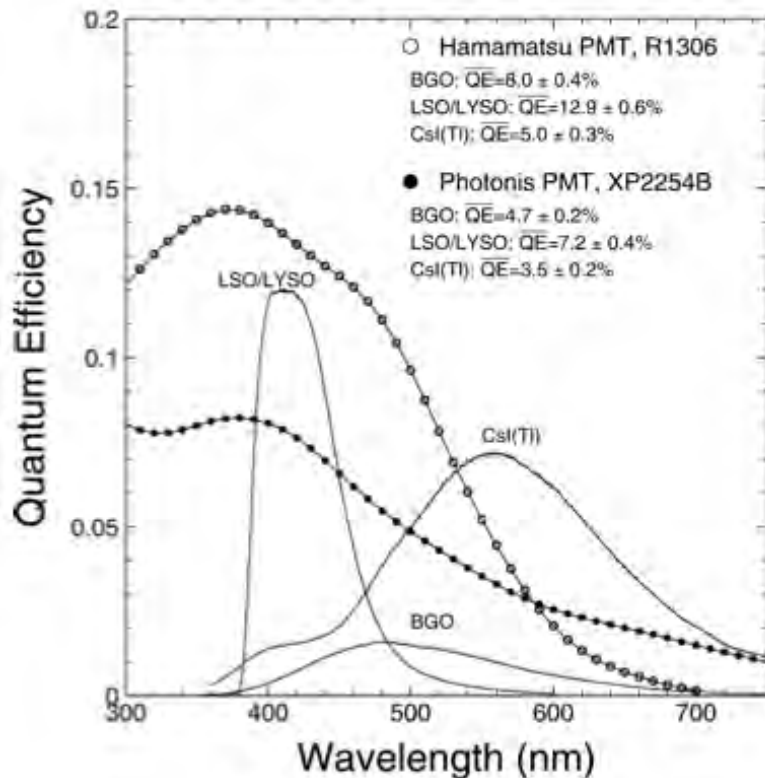


Fig. 10. The quantum efficiencies of a Hamamatsu 1306 PMT with a bi-alkali cathode (open circles) and a Photonis 2254B PMT with a multi-alkali cathode (solid dots) are shown as a function of wavelength together with the emission spectra of the LSO/LYSO, BGO and CsI(Tl) samples, where the area under the emission curves is proportional to their corresponding light output.

Questo è invece un confronto quantitativo fra l'efficienza luminosa del LYSO, CsI(Tl) e del BGO.

Come già detto l'integrale della $f(\lambda)$ per il LYSO, il CsI(Tl) e il BGO vale rispettivamente 40000, 50000 e 8000 fotoni/MeV)

Si noti come il massimo dell'efficienza luminosa $f(\lambda)$ del LYSO sia in corrispondenza del massimo dell'efficienza quantica $s(\lambda)$ del fotomoltiplicatore.

La quantità che interessa è l'integrale $\int_0^\infty f(\lambda)s(\lambda)d\lambda$ che nel caso del CsI(Tl) è pari al 4-5%. Questa percentuale rappresenta la massima frazione dell'energia rilasciata nello scintillatore che può essere convertita in un segnale elettrico.

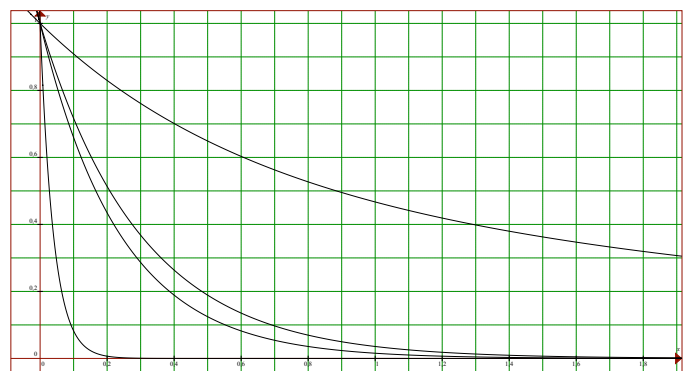
Confrontare le lunghezze d'onda di questi spettri con quelle della luce viola (400 nm), blu (500 nm), verde (550 nm), gialla (600 nm) e rossa (700 nm).

❖ Esercizio: qual è l'energia in eV di un fotone da 400 nm?

❖ Esercizio: qual è la massima efficienza luminosa teoricamente raggiungibile a 400 nm?

L'emissione luminosa non avviene istantaneamente: in ogni intervallo temporale infinitesimo dt , di tutti gli $N(t)$ centri di luminescenza ancora attivati solo una quantità dN di diseccita emettendo luce visibile. Questa quantità è proporzionale tramite una costante K al numero di centri ancora attivi $N(t)$ e all'intervallo temporale considerato: $dN = -K N(t) dt$ (il segno meno deriva dal fatto che N diminuisce e quindi $dN < 0$). $\rightarrow dN/N = -K dt$ da cui $N(t) = N(0) e^{-Kt}$ cioè un andamento esponenziale.

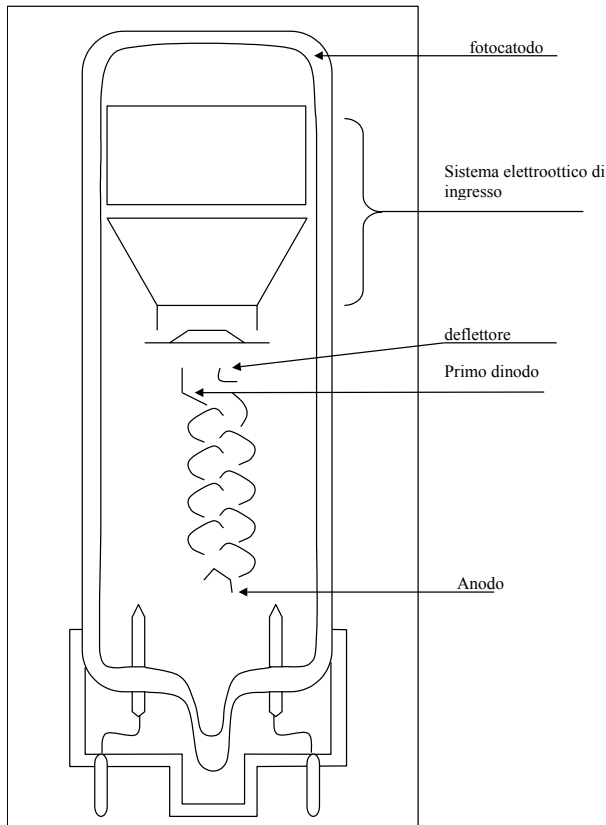
Da sinistra a destra sono riportati gli andamenti temporali attesi per LYSO, NaI(Tl), BGO e CsI(Tl) con costanti di tempo 40 ns, 250 ns, 300 ns e la somma dei contributi di due esponenziali da 600 ns e 3,4 μ s.



FOTOMOLTIPLICATORE

La luce emessa dallo scintillatore deve essere convertita in un segnale elettrico. Questa conversione può essere effettuata all'interno di un fotomoltiplicatore.

Si tratta di un tubo a vuoto fotosensibile il cui utilizzo è particolarmente consigliato in applicazioni che richiedono elevate sensibilità e risposte di tempo rapide. Il loro costo è però alto e necessitano di tensioni di alimentazione elevate (dell'ordine dei kV).



Un fotomoltiplicatore è costituito da:

- un fotocatodo che converte i fotoni di luce in elettroni, mediante fotoemissione
- un sistema di focalizzazione e accelerazione (gestito dal sistema elettroottico d'ingresso)
- uno stadio moltiplicatore di corrente costituito da elettrodi (dinodi) che utilizza il fenomeno dell'emissione secondaria di elettroni
- un anodo (o più anodi nei sistemi di imaging) che raccoglie il flusso di elettroni dopo il processo di moltiplicazione di carica e fornisce il segnale in uscita

Il tubo di vetro che racchiude tutti i componenti è sotto vuoto spinto per ridurre le collisioni fra degli elettroni col gas residuo. All'esterno viene posto uno schermo metallico di materiale ad alta permeabilità magnetica (μ -metal) per ridurre l'effetto curvante dei campi magnetici. Infine il tutto è sigillato a tenuta di luce.

Quando un fotone proveniente dallo scintillatore incide sul fotocatodo, viene emesso un elettrone per effetto fotoelettrico (fotoelettrone) con una certa efficienza (efficienza quantica). Un'opportuna geometria del campo elettrico accelera e focalizza l'elettrone sul primo dinodo dove trasferisce la sua energia agli elettroni del materiale. Questo causa l'emissione di un certo numero di elettroni secondari che, a loro volta, incidono sul dinodo successivo permettendo un'ulteriore emissione di elettroni e così via, generando una moltiplicazione degli elettroni fino ad arrivare all'anodo dove il segnale in corrente viene finalmente prelevato per essere amplificato ed analizzato attraverso un opportuna catena elettronica.

Pertanto, un rivelatore di radiazione formato dall'accoppiamento scintillatore-PMT sarà in grado di fornire non solo informazioni sul passaggio della particella ma anche sull'energia rilasciata da questa interagendo col materiale scintillante.

RACCOLTA DELLA LUCE e ACCOPPIAMENTO OTTICO

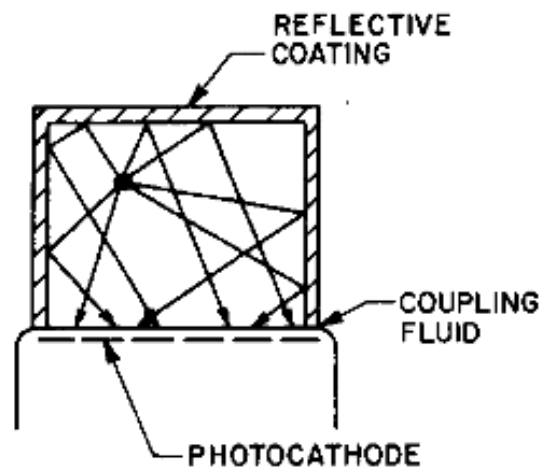
Le prestazioni di un rivelatore a scintillazione sono criticamente dipendenti dall'efficacia della raccolta di luce: meno luce viene raccolta e maggiore diventa la fluttuazione statistica del segnale in uscita.

La luce di scintillazione viene emessa nel cristallo secondo una distribuzione isotropa; solo una frazione di questa raggiunge l'interfaccia cristallo-vetro, a causa delle perdite per assorbimento nel cristallo e per rifrazione sulle sue pareti laterali. Per questo secondo motivo le pareti del cristallo non a contatto con il PMT vengono ricoperte di un materiale riflettente (spesso è alluminio) o diffondente (teflon o vernici al titanio ad alta riflettività).

Inoltre, è necessario considerare le perdite di luce causate dall'accoppiamento ottico fra cristallo e vetro del PMT: se l'indice di rifrazione del cristallo scintillante è molto maggiore di quello del vetro o, peggio, tra i due è presente uno strato d'aria con indice di rifrazione 1, la raccolta dei fotoni viene influenzata da fenomeni di riflessione totale.

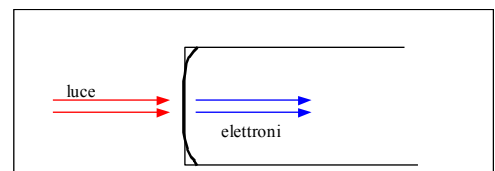
Per ridurre la differenza degli indici di rifrazione si interpone fra cristallo e vetro uno strato di grasso o olio silconico che avendo un indice di rifrazione intermedio fra quello del cristallo e del vetro aumenta l'angolo limite al di sopra del quale la luce viene riflessa anziché essere trasmessa al PMT.

Nel caso del CsI(Tl) (indice di rifrazione $n_s=1,78$) accoppiato al vetro ($n_v=1,47$) l'angolo limite $\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_v}{n_s}\right) = \arcsin\left(\frac{1,47}{1,78}\right) = 56^\circ$ mentre un sottile strato di aria fra scintillatore e vetro farebbe rimbalzare indietro i fotoni che arrivassero all'interfaccia con un angolo superiore a soli $\arcsin\left(\frac{1}{1,78}\right) = 34^\circ$



FOTOCATODO E SUA SENSIBILITA' - ACCOPPIAMENTO LUNGHEZZE D'ONDA

In uno schema semplificato, il tubo fotomoltiplicatore è costituito da una finestra di ingresso, in genere di quarzo, all'interno della quale si trova un film sensibile alla luce (strato emittente): il fotocatodo. Questo è accoppiato a un moltiplicatore di elettroni.



La luce incidente sul fotocatodo, tramite un processo di fotoemissione (effetto fotoelettrico), libera degli elettroni che, per essere moltiplicati devono prima attraversare il materiale fotosensibile senza essere assorbiti e superare la barriera di potenziale che separa il materiale dal vuoto all'interno del fototubo.

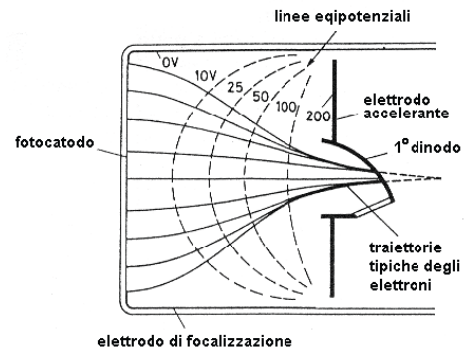
L'efficienza di questo processo viene caratterizzata dall'efficienza quantica $s(\lambda)$ del fotocatodo, definita come il rapporto fra il numero di fotoelettroni emesso ed il numero di fotoni di una data lunghezza d'onda incidenti sul fotocatodo. Nei casi di nostro interesse (cristalli inorganici) l'efficienza quantica è dell'ordine del 10-20% (nei dispositivi più moderni si può arrivare al 40%). L'efficienza dipende dal materiale del fotocatodo; spesso è costituito da leghe di metalli alcalini con un basso potenziale di estrazione.

Come visto precedentemente il parametro determinante è l'integrale $\int_0^\infty f(\lambda) s(\lambda) d\lambda$ che rappresenta la massima frazione dell'energia rilasciata nello scintillatore che può essere convertita in un segnale elettrico. Nella scelta di un PMT, quindi, si dovrà cercare un buon accordo tra la curva dell'efficienza quantica del fotocatodo e lo spettro di emissione del cristallo, necessario per aumentare al massimo il numero di fotoelettroni prodotti. Dato che la

fotoemissione è un processo probabilistico in cui, essendo ogni emissione indipendente dalle altre, il numero di fotoelettroni $n_{p.e.}$ fluttua poissonianamente con una incertezza relativa $\sigma(n_{p.e.})/n_{p.e.} = \frac{1}{\sqrt{n_{p.e.}}}$ tanto più trascurabile quanto maggiore è il numero di fotoelettroni prodotto.

SISTEMA ELETTROOTTICO D'INGRESSO (FOCALIZZAZIONE E ACCELERAZIONE)

Come è riportato schematicamente in figura, i fotoelettroni che riescono a superare la barriera fotocatodo-vuoto vengono accelerati da un elettrodo per strapparli dal fotocatodo e aumentarne l'energia cinetica con cui urteranno il primo dinodo mentre un elettrodo focalizzante, posto sulla parete dell'involucro, li indirizza sul primo dinodo. Nella figura sono mostrate alcune linee equipotenziali con alcuni possibili percorsi dei fotoelettroni.



SISTEMA DI MOLTIPLICAZIONE: DINODI e COEFFICIENTE DI EMISSIONE SECONDARIA

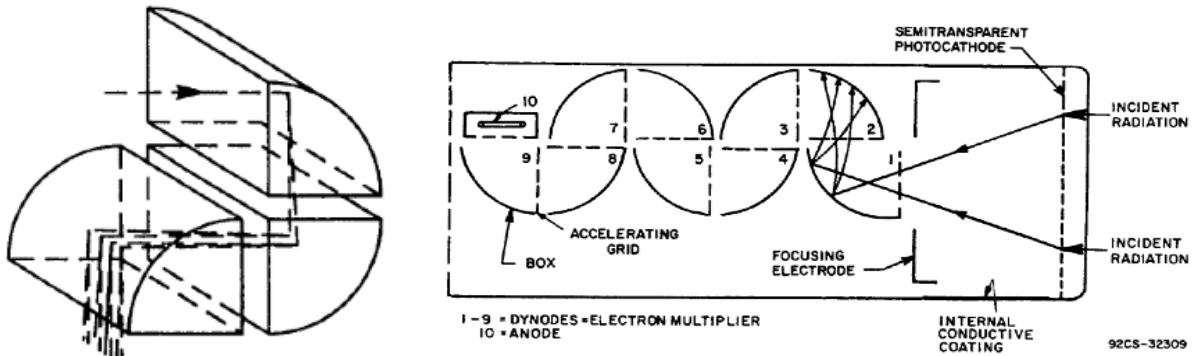
I fotoelettroni che colpiscono il primo dinodo con un'energia sufficiente, sono in grado di estrarre a loro volta da questo un certo numero di elettroni secondari: è questo il fenomeno dell'emissione secondaria. Tali elettroni vengono a loro volta accelerati verso il secondo dinodo, dal quale estraggono altri elettroni, e così via, producendo una moltiplicazione della carica raccolta da un elettrodo finale, l'anodo. In pratica il campo elettrico tra i dinodi permette agli elettroni emessi da ogni dinodo di colpire il successivo con un'energia media di 50-100 eV.

La teoria dell'emissione secondaria è molto simile a quella per l'emissione fotoelettrica, con la differenza che il fotone incidente è ora sostituito da un elettrone.

Nell'impatto sul dinodo, l'elettrone trasferisce la sua energia direttamente agli elettroni del materiale consentendo l'emissione di un certo numero di elettroni secondari (il guadagno δ di ogni elettrodo, inteso come numero di elettroni secondari generati per ogni elettrone incidente sul dinodo, è chiamato coefficiente di emissione secondaria).

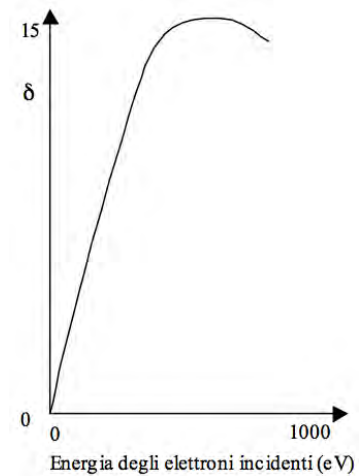
Se δ è il numero di elettroni secondari per elettrone incidente ad ogni dinodo, il guadagno complessivo del tubo fotomoltiplicatore sarà $G = f (g \delta)^N$ dove N è il numero totale di dinodi, f è il fattore di raccolta fotocatodo-primo dinodo (normalmente dell'ordine del 90%) e g è l'efficienza di trasferimento degli elettroni fra i dinodi (normalmente dell'ordine del 100%) $\rightarrow G = f (g \delta)^N \approx \delta^N$ con δ dell'ordine di 4-5 per moderati voltaggi operativi. Il guadagno complessivo è dell'ordine di 10^6 . I materiali principalmente utilizzati per la costruzione dei dinodi sono le leghe Cu-Be o Mg-Ag.

Esistono diverse configurazioni dei dinodi. Una delle più comuni è quella a scatola e griglia (box and grid) in cui i dinodi sono una serie di semicerchi disposti su una linea.



Come visto il primo dinodo ha anche il compito di accoppiare il sistema d'ingresso al tubo moltiplicatore: deve raccogliere tutti gli elettroni emessi dal fotocatodo e defletterli in modo che colpiscano gli altri dinodi secondo l'angolo corretto.

Il fattore di emissione secondaria δ dipende dall'energia dell'elettrone incidente: per alti valori di energia l'elettrone incidente penetra nel materiale. Questo spiega il calo della curva in tale zona di valori. Per energie più basse, fino a circa 100 eV (e quindi tensioni dinodo-dinodo V di circa 100 V), il valore di δ cresce linearmente (con pendenza k : $\delta = k V_d$) fino a circa 10 per energie di circa 150 eV.



ALIMENTAZIONE IN HV CON PARTITORE

Molto spesso i potenziali dei dinodi vengono realizzati mediante un partitore di tensione realizzato con resistenze uguali per cui fra un dinodo e il successivo c'è la stessa differenza di potenziale. Detta V la tensione fra fotocatodo e anodo di raccolta, questa viene distribuita in modo lineare tra gli N dinodi: $V = N V_d$.

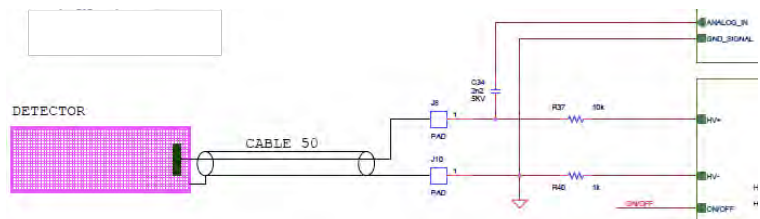
Pertanto il guadagno G del tubo moltiplicatore è: $G = \delta^N = (k V_d)^N = (k V/N)^N$.

Bisogna porre attenzione sulla stabilità della tensione di alimentazione. Infatti si può ricavare: $\sigma(G)/G = N \sigma(V)/V$ cioè la variazione percentuale del guadagno è N volte più grande della variazione percentuale della tensione di alimentazione.

Durante l'uso, per ogni particella rivelata si genera una corrente di elettroni che viene estratta dai dinodi e indirizzata verso l'anodo. Questa corrente negli ultimi stadi del tubo moltiplicatore può diventare confrontabile con la corrente di partitore. Per stabilizzarla si aggiungono dei condensatori che forniscono la carica necessaria per tutta la durata del picco di corrente. Queste capacità vengono poi ricaricate durante l'intervallo tra due picchi.

I tubi fotomoltiplicatori possono lavorare con un valore dell'alta tensione sia positivo sia negativo (a patto che il potenziale dei dinodi e dell'anodo sia maggiore di quello applicato al fotocatodo).

Nella strumentazione del nostro laboratorio viene usata una tensione positiva: il fotocatodo è mantenuto a massa per evitare scariche che possono verificarsi tra il fotocatodo e lo scintillatore o tra il fotocatodo e



l'involucro esterno del rivelatore. Mantenendo a massa il fotocatodo viene anche minimizzato il rumore elettronico proveniente dal fotocatodo. Questo vantaggio è però compensato dal fatto che l'anodo deve essere tenuto ad un potenziale positivo costante.

Pertanto è necessario disaccoppiare l'anodo attraverso una opportuna capacità di blocco, per eliminare la componente continua del segnale (e quindi con una perdita di informazione temporale: la capacità di disaccoppiamento forma, con la resistenza di ingresso del sistema di lettura, un filtro passa basso che taglia le armoniche del segnale a frequenze più elevate).

Il contatore scelto per il laboratorio utilizza un fotomoltiplicatore ADIT B29B01 che ha $n = 11$ dinodi ed è alimentato a circa 660 V. Essendo $\delta(60 \text{ V})$ circa 4 si ha $G = 4^{11} = 4 \times 10^6$. Ogni fotoelettrone, quindi, produce una carica all'anodo $Gq = 4 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 0,6 \text{ pC}$.

Finora non abbiamo considerato il tempo necessario ai fotoelettroni per arrivare all'anodo. Se questo tempo fosse superiore o confrontabile con il tempo caratteristico della diseccitazione del cristallo occorrerebbe tenerne conto nel momento della scelta del PMT da usare.

Calcoliamo la velocità media di un elettrone che, partendo da fermo da un dinodo, arriva sul successivo con un'energia cinetica di 60 eV. Ipotizziamo che la velocità sia non relativistica (del resto l'energia cinetica è una piccola frazione dell'energia a riposo dell'elettrone):

$$60 \text{ eV} = \frac{1}{2} m v^2 \text{ con } m = 511 \text{ keV}/c^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \times 60}{511 \times 10^3}} c = 0,015 c$$

L'approssimazione non relativistica è quindi valida, pertanto $v = 4,5 \times 10^8 \text{ cm/s} = 0,45 \text{ cm/ns}$. Quindi per percorrere i circa 10 cm di lunghezza della traiettoria fotocatodo-anodo con una velocità media di circa 0,25 cm/ns occorrono 40 ns, tempo decisamente trascurabile rispetto ai tempi dell'emissione di scintillazione del CsI(Tl).

Nei dispositivi (p.es. ToF-PET) in cui la misura dei tempi è critica occorre scegliere, oltre che cristalli veloci (p.es. LYSO), fotomoltiplicatori in cui le fluttuazioni del tempo di transito fotocatodo-anodo sono trascurabili. Questo richiede un'accurata progettazione del sistema elettroottico per rendere il tempo di arrivo degli elettroni sull'anodo quanto più possibile indipendente dal punto di impatto del fotone sul fotocatodo.

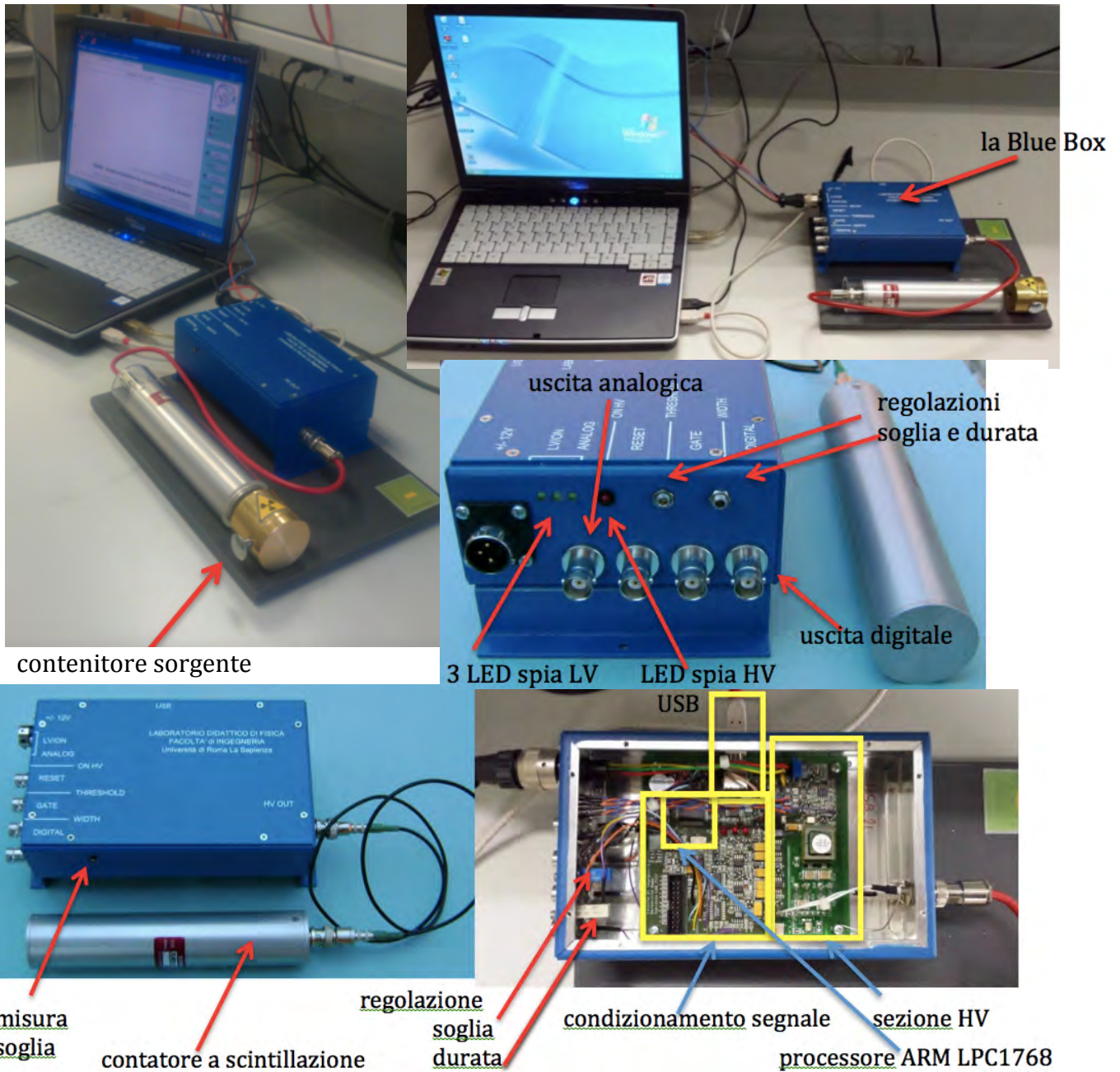
Anche quando un fotomoltiplicatore non è illuminato al suo interno può scorrere una piccola corrente che prende il nome di corrente oscura (dark current) originata dall'emissione termoionica da parte del catodo e dei dinodi.

Se gli elettroni sono generati per eccitazione termica dal fotocatodo la carica raccolta all'anodo è maggiore rispetto all'emissione dagli altri dinodi, perché tale segnale risulta maggiormente amplificato dagli stadi successivi.

Questi impulsi di corrente spuri che si manifestano in uscita corrispondono all'emissione di un singolo elettrone da parte del fotocatodo; questo comporta che la loro ampiezza è relativamente piccola. Nella rivelazione di impulsi luminosi provenienti da un cristallo scintillante, invece, il numero di fotoelettroni emessi dal fotocatodo è molto maggiore; discriminando quindi l'ampiezza degli impulsi in uscita è possibile eliminare o almeno ridurre i contributi del rumore termico.

Segnali spuri di ampiezza maggiore possono invece essere causati dalla radiazione emessa da elementi radioattivi contenuti nell'atmosfera (^{222}Rn e nuclei figli) o nell'ambiente (^{40}K del cemento delle pareti) o direttamente dal passaggio di raggi cosmici nello scintillatore.

CATENA DI MISURA IN DOTAZIONE AL LABORATORIO



GIADA (Graphic Interface for Acquisition and Data Analysis) è un software didattico sviluppato per "Fisica delle radiazioni applicata alla medicina" di Ingegneria Biomedica della Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale alla Sapienza. Il sistema BLUE BOX-GIADA esiste grazie all'impegno profuso fuori dalle attività istituzionali da Stefano Pioli (software), Giovanni Corradi (hardware), Francesco Colao (firmware) e ai fondi assegnati al Laboratorio Didattico di Fisica dalle Facoltà ICI e I3S





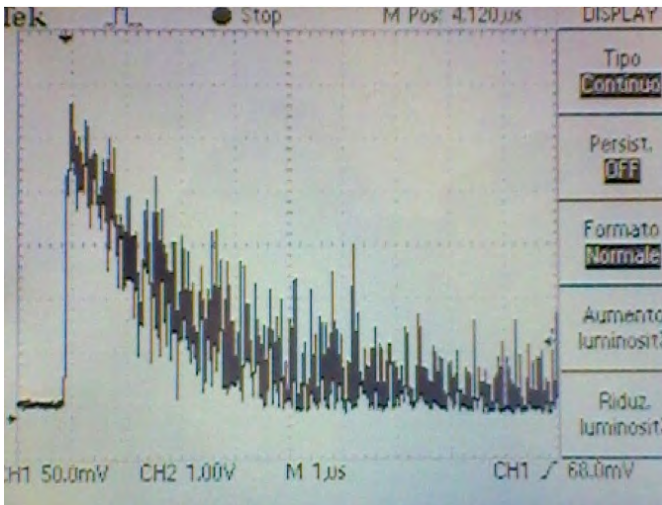
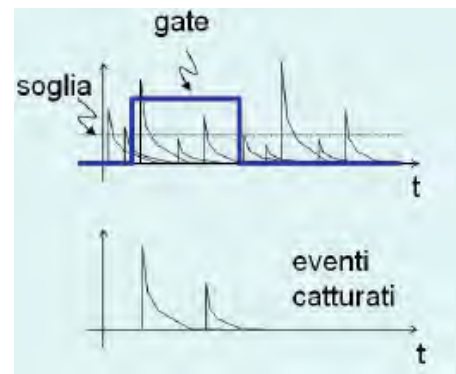
La **BLUE BOX** è il sistema integrato che genera l'alta tensione (HV) per alimentare il rivelatore di particelle ionizzanti, condiziona i segnali e ne cura la digitalizzazione.

I rilasci di energia nel cristallo vengono trasdotti dal PMT in impulsi di corrente. Un circuito della Blue Box discrimina i segnali che hanno un'ampiezza in tensione superiore a un valore prefissato di soglia (THR) e produce un segnale digitale di durata (WIDTH) entrambi regolabili tramite potenziometri.

Il segnale analogico e quello digitale sono visualizzabili con un oscilloscopio.

Periodicamente si apre un GATE. Solo gli eventi all'interno della durata del GATE che superano il valore di soglia vengono analizzati: contati nella sezione CONTEGGI e analizzati in tensione nella sezione AMPIEZZA.

L'esempio di segnale analogico visualizzabile con un oscilloscopio (uscita ANALOG) mostra una salita ripida e una discesa con una costante di tempo di circa $3\mu s$ che è quanto atteso per la diseccitazione del CsI(Tl). La struttura frastagliata del segnale è dovuta alla sovrapposizione degli impulsi generati dai singoli fotoelettroni.



I principali comandi di GIADA riguardano l'accensione o meno dell'alimentazione del PMT, la lettura dell'HV, l'attivazione o meno di un buzzer e il controllo della larghezza del GATE periodico di acquisizione.

Il **TAB per l'analisi dell'ampiezza** dei segnali produce un istogramma con le ampiezze dei segnali proporzionali al rilascio di energia nel cristallo.

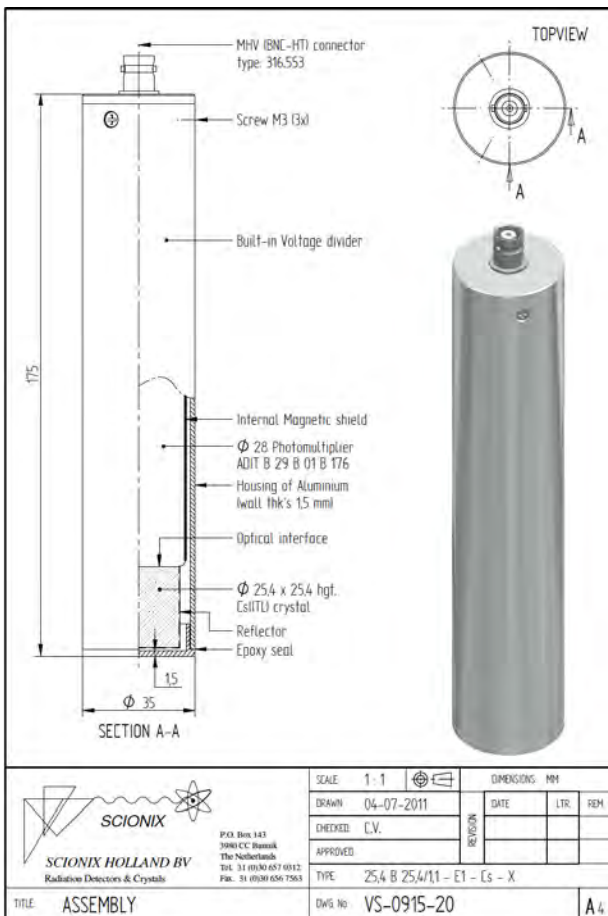
Il **TAB per l'analisi dei conteggi** produce un istogramma con il numero di conteggi

ottenuto durante ogni GATE.

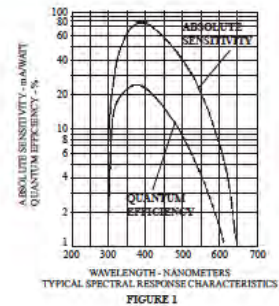
L'acquisizione può essere attivata sia dalla pagina AMPIEZZA che da quella CONTEGGI. Si può fissare il numero di GATE da acquisire o arrestare la raccolta dati agendo dalla pagina dalla quale è stata avviata l'acquisizione.

I dati registrati durante un'acquisizione possono essere salvati sul desktop del PC sia sotto forma di tabella col contenuto dei canali dell'istogramma che sotto forma di grafico dell'istogramma.

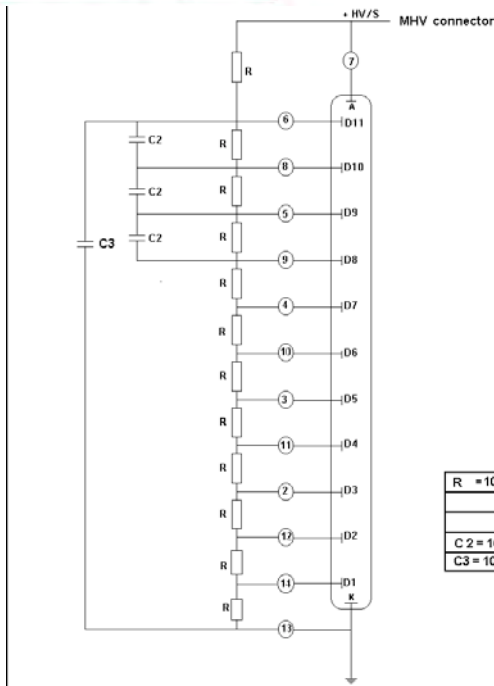
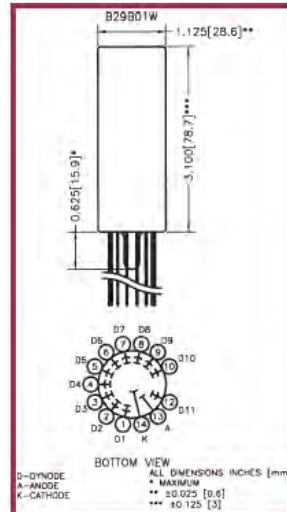
B29B01W Photomultiplier Tube



The B29B01W is a 1-1/8" diameter, 11-stage end-on photomultiplier designed for scintillation counting and other applications where high quantum efficiency, low dark current, good collection efficiency, and gain stability are of paramount importance.



Photocathode: Semitransparent Bi-alkali
 Spectral Response: See Figure 1
 Wavelength of maximum response: 400 ± 50 nm
 Minimum diameter: 24 mm
 Window shape: plano-plane, circular
 Window index of refraction @ 436 nm: 1.523
 Dynodes: Cs₂Sb, coated Box & Grid
 Capacitance (anode to all electrodes): 4 pF
 Operating position: Any
 Weight: 50 grams
 Rev: 01.04



ELECTRICAL OPERATING RATINGS

	MINIMUM	TYPICAL	MAXIMUM*	UNITS
Cathode to dynode No. 1 voltage	40	150	300	VDC
Cathode to anode voltage		700	1500	VDC
Voltage between consecutive dynodes			250	VDC
Ambient storage temperature		23	60	°C
Anode current, average over 30 sec.		10	10.0	μA
Cathode current		0.2	0.3	μA
Cathode luminous sensitivity ⁽¹⁾ With 2854° K tungsten source With blue light source ⁽²⁾	50 5	70 10	90 13	μA/Im μA/Im(B)
Quantum efficiency @ 420 nm		25		%
Cathode radiant sensitivity @ 420 nm		80		mA/W
Anode luminous sensitivity 700 VDC: With 2854° K tungsten source of 1 x 10 ³ Im	10	20	40	A/Im
Current amplification @ 700 VDC		1 X 10 ⁶		
Anode dark current ⁽³⁾ @ 22° C	0.02	0.05	2.0	nA
Plateau width @ 40 mV threshold (approx. 100 keV) with ¹³⁷ Cs source		180		Volts

SCIONIX HOLLAND BV
 Dedicated Scintillation Detectors

P.O. Box 143
 3980 CC Bunnik
 The Netherlands
 Tel. 31 (0)30 657 0312
 Fax. 31 (0)30 656 7563



Specifications

E-mail : SCIONIX@wxs.nl
 Web. <http://www.scionix.nl>

Subject: 25.4 B 25.4 / 1.1 – E1 – Cs – X
 Description: 1"x1 CsI(Tl) Scintillation detector with built-in High ohmic Voltage Divider

Scintillation crystal	:	CsI(Tl) 25.4 mm diameter, 25.4 mm hgt.
Crystal read out	:	30 mm dia. photomultiplier ADIT B29B01
Detector diameter	:	35 mm
Detector length	:	175 mm
Wall thickness	:	1.5 mm aluminum
High Voltage requirements	:	Positive + 600 – 800 V.
Voltage Divider	:	Single connector, 100 MΩhm
Electrical connections	:	Single MHV connector at backside for combined signal and High Voltage
High Voltage Polarity	:	Positive
Max High voltage current needed	:	10microAmps
Energy Resolution	:	< 10 % FWHM @ 662 keV