COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 := (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 := (-1,0,k)$ e $\mathbf{v}_3 := (1,k,4)$ di $\mathbb{R}^3$.

2 | (a) Per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

$k \neq 2$ e $k \neq -2$

Motivazione:

Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & k & 4 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base canonica. Questa matrice ha determinante $4-k^2$ che si annulla per $k=2$ e $k=-2$. Per valori di k diversi da 2 e -2 i tre vettori formano dunque una base per $\mathbb{R}^3$.

2 | (b) Per quali valori di k esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0) = \mathbf{v}_1$, $f(0,1) = \mathbf{v}_2$ e $f(2,1) = \mathbf{v}_3$?

$k = 2$

Motivazione:

I vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^2$, dunque esiste un unico omomorfismo $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\bar{f}(1,0) = \mathbf{v}_1$ e $\bar{f}(0,1) = \mathbf{v}_2$. Poiché $(2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$ si ha che

$$\bar{f}(2,1) = 2 \cdot \bar{f}(1,0) + 1 \cdot \bar{f}(0,1) = 2 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (-1,0,k) = (1,2,2+k).$$

Affinché sia $\bar{f}(2,1) = \mathbf{v}_3$ deve quindi essere $(1,2,2+k) = (1,k,4)$ il che avviene se e solo se $k = 2$.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati l'iperpiano $\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 = 0$ e i punti $A := (3, 1, 1, 2)$ e $B := (1, 1, 2, 0)$.

2	

(a) La retta r passante per A e B interseca l'iperpiano π? ☒ Sì ☐ No

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 3 + (1-3)t \\ x_2 = 1 + (1-1)t \\ x_3 = 1 + (2-1)t \\ x_4 = 2 + (0-2)t \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 2 - 2t \end{cases}$$

Ponendo a sistema con l'equazione dell'iperpiano otteniamo l'equazione risolvente:

$$2(3-2t) - 1 + (1+t) - (2-2t) + 3 = 0$$

cioè $-t + 7 = 0$. Poiché questa equazione è risolubile la retta interseca l'iperpiano.

2	

(b) Il segmento di estremi A e B interseca l'iperpiano π? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 > 0$ e $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3$ otteniamo $2 \cdot 3 - 1 + 1 - 2 + 3 = 7$. Abbiamo un numero positivo, dunque A appartiene al semispazio $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 > 0$. Sostituendo le coordinate di B in $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3$ otteniamo $2 \cdot 1 - 1 + 2 - 0 + 3 = 6$. Abbiamo un numero positivo, dunque B appartiene al semispazio $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 > 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca l'iperpiano π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π.
Vedere il file dei commenti.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & -k \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Per quali valori di k il nucleo di f_k è generato dal vettore $\mathbf{v} := (0, 1, -1)$?

$k \neq 0$

Motivazione:

Moltiplicando la matrice A_k per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & -k \\ 1 & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ottiene che $f_k(\mathbf{v}) = (0, 0, 0)$ qualunque sia k, cioè $\mathbf{v}$ appartiene a $\ker f_k$ qualunque sia k. I valori di k per cui il nucleo di f_k è esattamente il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ sono quelli per cui $\dim \ker f_k = 1$. Poiché $\dim \ker f_k = 3 - \operatorname{rk} A_k$ deve quindi essere $\operatorname{rk} A_k = 2$. Poiché il nucleo ha sempre dimensione almeno 1 il rango di A_k è minore di 3. Se $k = 0$ la matrice A_k si riduce alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 mentre se $k \neq 0$ il minore di A_k formato dalle prime 2 righe e prime 2 colonne è invertibile e, quindi, A_k ha rango 2.
Vedere il file dei commenti.

| 3 | |

(b) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = 0$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è $\det(A_k - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2 & -k-x & -k \\ 1 & k & k-x \end{vmatrix} = (1-x)x^2$, che si annulla per 0 e 1.
Calcoliamo la dimensione degli autospazi in dipendenza da k. Si ha

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & -k \\ 1 & k & k \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 - 2 = 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 3 - 1 = 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\dim E(1) = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 1 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -k-1 & -k \\ 1 & k & k-1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

qualunque sia k. Infatti per nessun valore di k la seconda e la terza riga della matrice sono multiple una dell'altra.

Dunque si ha $\dim E(0) + \dim E(1) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 0 \\ 3 & \text{se } k = 0 \end{cases}$.

Pertanto A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 0$

| 2 | |

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vedere il file dei commenti.

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito $E := \{(x, y, z, w) \mid x + 2y - z + 2w = 0\}$ e sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che ha una base formata dai vettori $\mathbf{u} := (1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} := (1, 0, 4, 1)$.

2 (a) Determina una base per $E \cap F$.

$(4, 1, 12, 3)$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{z}$ appartiene a F se e solo se si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cioè se si ha per qualche valore di α e β:

$$\mathbf{z} = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 4, 1) = (\alpha + \beta, \alpha, 4\beta, \beta).$$

Imponendo che $\mathbf{z}$ appartenga a E troviamo la condizione

$$(\alpha + \beta) + 2\alpha - 4\beta + 2\beta = 0$$

cioè $3\alpha - \beta = 0$, da cui otteniamo $\beta = 3\alpha$. I vettori di $E \cap F$ sono allora i vettori del tipo $(\alpha + 3\alpha, \alpha, 4 \cdot 3\alpha, 3\alpha) = (4\alpha, \alpha, 12\alpha, 3\alpha)$. Scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1$ si trova un vettore che forma una base di $E \cap F$.

2 (b) Determina una base per $E + F$.

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Il sottospazio E, insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea non identicamente nulla ha dimensione uguale a $4 - 1 = 3$. Il sottospazio F ha una base formata da 2 vettori e, quindi, $\dim F = 2$.
Dal punto precedente sappiamo che $\dim(E \cap F) = 1$.
Per la formula di Grassmann, si ha $\dim(E+F) = \dim E+\dim F-\dim(E\cap F) = 3+2-1 = 4$.
Ma allora $E + F$ coincide con $\mathbb{R}^4$ e possiamo prendere come base per $E + F$ una qualsiasi base per $\mathbb{R}^4$, ad esempio la base canonica.

3 (c) Determina una base ortonormale di F.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{70}}, -\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{8}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}\right)$

Vedere il file dei commenti.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (2, 4)$, $B := (1, 7)$ e la retta $r : 3x - 4y + 15 = 0$.

3

(a) Determina tutti i punti C sulla retta r tali che il triangolo ABC abbia area 5.

$(-1, 3)$ $\left(\frac{13}{3}, 7\right)$

Motivazione:

La distanza di A da B è uguale a $\sqrt{(2-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{10}$. Affinché l'area del triangolo ABC sia uguale a 5, l'altezza relativa alla base AB deve allora essere uguale a $\frac{5 \cdot 2}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Dall'equazione cartesiana di r ricaviamo le sue equazioni parametriche: $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$.

La retta s per A e B ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-1 & y-7 \\ 2-1 & 4-7 \end{vmatrix} = 0$ cioè $-3x - y + 10 = 0$.
La distanza del generico punto $(-5 + 4t, 3t)$ di r da questa retta è uguale a

$$\frac{|-3 \cdot (-5 + 4t) - (3t) + 10|}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|25 - 15t|}{\sqrt{10}}.$$

Uguagliando questa quantità a $\sqrt{10}$ troviamo l'equazione $|25 - 15t| = 10$, le cui soluzioni sono $t = 1$ e $t = \frac{7}{3}$. Sostituendo questi valori nelle equazioni parametriche di r troviamo le coordinate dei punti cercati.
Vedere il file dei commenti.

2

(b) Determina tutti i punti D sulla retta r tali che il triangolo ABD sia isoscele con $AD = BD$.

$D := (3, 6)$

Motivazione:

Il generico punto $(-5 + 4t, 3t)$ di r ha distanza da A uguale a

$$\sqrt{(-5 + 4t - 2)^2 + (3t - 4)^2} = \sqrt{25t^2 - 80t + 65}$$

e distanza da B uguale a

$$\sqrt{(-5 + 4t - 1)^2 + (3t - 7)^2} = \sqrt{25t^2 - 90t + 85}.$$

Uguagliando queste due distanze otteniamo $25t^2 - 80t + 65 = 25t^2 - 90t + 85$, vale a dire $10t = 20$, la cui soluzione $t = 2$, sostituita nelle equazioni parametriche di r, dà le coordinate del punto D cercato.
Vedere il file dei commenti.

2

(c) Fissato il punto D come alla domanda precedente determina l'equazione cartesiana della bisettrice dell'angolo interno in D del triangolo ABD.

$x - 3y + 15 = 0$

Motivazione:

Poiché il triangolo ABD è isoscele con $AD = BD$, la bisettrice dell'angolo in D coincide con la mediana passante per D, cioè con la retta congiungente D con il punto medio di A e B. Il punto medio di A e B è il punto $M := \left(\frac{2+1}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$. La retta passante per M e D ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-3 & y-6 \\ \frac{3}{2}-3 & \frac{11}{2}-6 \end{vmatrix} = 0$ cioè $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{15}{2} = 0$, o, equivalentemente, $x - 3y + 15 = 0$.
Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$ e il piano $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$.

| 2 | |

(a) Il piano σ contenente r e ortogonale a π ha equazione cartesiana:

$2x - 5y - z + 9 = 0$

Motivazione:

Il piano σ contiene la retta r se e solo se contiene il punto $P := (7, 5, -2)$ ed è parallelo al vettore $(3, 2, -4)$.
Il vettore $(2, 1, -1)$ è ortogonale a π. Il piano σ è ortogonale a π se e solo se è parallelo a questo vettore.
Abbiamo quindi un punto contenuto in σ e due vettori ad esso paralleli. Possiamo così scrivere l'equazione del piano $\begin{vmatrix} x-7 & y-5 & z-(-2) \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ cioè $2x - 5y - z + 9 = 0$.
Vedere il file dei commenti.

| 2 | |

(b) La retta s proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni cartesiane:

$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - z + 9 = 0 \end{cases}$

Motivazione:

La proiezione ortogonale della retta r su π si ottiene intersecando il piano π con il piano che passa per r ed è ortogonale a π cioè il piano σ.
Vedere il file dei commenti.

| 3 | |

(c) Le sfere con centro appartenente a r, tangenti a π e di raggio $\sqrt{6}$ hanno equazioni cartesiane:

$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 6 \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 6$

Motivazione:

Una sfera è tangente a un piano se e solo se la distanza tra questo piano e il centro della sfera è uguale al raggio della sfera stessa. I centri delle sfere cercate sono quindi i punti di r aventi distanza $\sqrt{6}$ dal piano π.
La distanza da π del generico punto $(7 + 3t, 5 + 2t, -2 - 4t)$ di r è uguale a $\frac{|2(7+3t)+(5+2t)-(-2-4t)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|12t+18|}{\sqrt{6}}$. Imponendo che questa distanza sia uguale a $\sqrt{6}$ otteniamo l'equazione $\frac{|12t+18|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ vale a dire $|12t + 18| = 6$ le cui soluzioni sono $t = -1$ e $t = -2$. Sostituendo questi due valori nelle equazioni parametriche di r troviamo i punti $(4, 3, 2)$ e $(1, 1, 6)$. Le sfere centrate in questi punti di raggio $\sqrt{6}$ sono le sfere cercate.