COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ vettori che formano una base di uno spazio vettoriale V.

2 (a) Quanti endomorfismi di V esistono tali che $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$ ed il nucleo di f sia generato da $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$?

Motivazione:

2 (b) Quanti endomorfismi di V esistono tali che $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$ ed il nucleo di f sia generato da $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$?

Motivazione:

2. Siano dati i punti $A := (1, 0, 1, 0)$, $B := (5, 4, 1, 4)$ e $C := (k, 1, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ con k parametro reale.

2 (a) Per quali valori di k il punto C appartiene al segmento aperto di estremi A e B?

Motivazione:

2 (b) Per quali valori di k esiste un unico iperpiano che passa per i punti A, B, C e l'origine O?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica sia la matrice $A_k := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (1, 1, 2)$.

2	

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f_k?

Motivazione:

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

2	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (2, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 0, 1)$ e sia $F_k := \{(x, y, z, w) \mid x - y = 0, x - kz + w = 0\}$ con k parametro reale.

3	

(a) Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

Motivazione:

2	

(b) Determina $\dim(E + F_k)$ al variare del parametro k.

Motivazione:

2	

(c) Determina una base ortonormale per E.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3, 2)$, $B := (2, 5)$ e $C := (5, 6)$.

2	

(a) Determina l'equazione cartesiana della retta r passante per B e che divide il triangolo ABC in due triangoli di area uguale.

Motivazione:

2	

(b) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$D = (\quad , \quad ,)$

Motivazione:

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano date le rette $r : \begin{cases} x + 3y - 4z + 10 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

3	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

Motivazione:

2	

(c) La distanza tra i piani π e σ è.

Motivazione: